

VŠEOBECNÁ TEÓRIA RELATIVITY AKO MOTIVAČNÁ TÉMA PRE NADANÝCH ŠTUDENTOV STREDNÝCH ŠKÔL

Pavol Valko

Oddelenie fyziky, Ústav jadrového a fyzikálneho inžinierstva, Fakulta elektrotechniky a informatiky,
Slovenská technická univerzita, Bratislava

Abstrakt: *Všeobecná teória relativity je téma, ktorú niekedy nekriticky tabuizujeme ako veľmi náročnú na pochopenie alebo opačne, používame na jej priblíženie hrubé a často zavádzajúce zjednodušenia. Exaktné podanie všeobecnej teórie relativity skutočne vyžaduje zvládnutie netriviálneho matematického aparátu, avšak ako mienim v tomto príspevku ukázať, existuje viacero javov súvisiacich s touto teóriou, ktoré sú zvládnuteľné aj na stredoškolskej úrovni.*

Kľúčové slová: zotrvačná a gravitačná hmotnosť, priestoročas, gravitačný červený posun

Úvod

Náročnosť všeobecnej teórie relativity je častejšie spájaná s použitým matematickým aparátom ako s jej fyzikálnymi východiskami. Využitie metód diferenciálnej geometrie zakriveného priestoročasu na vytvorenie špeciálne relativistickej invariantnej teórie gravitačného pôsobenia hmotných objektov, vyžaduje istú mieru predstavivosti, ale hlavne poctivé výpočtové zručnosti pri určovaní zložiek koeficientov afinnej konexie, tenzorov krivosti, atď. V tejto podobe všeobecná teória relativity jednoznačne patrí len do posluchárni fyzikálno-matematicky zameraných fakúlt. Na druhej strane, dnes sa pomerne často stretávame s komentovaním dôsledkov tejto teórie v extrémne populárnej forme v rôznych populárno-vzdelávacích programoch niektorých TV staníc, ktoré sú často sprevádzané dokonca aj chybami, vznikajúcimi nepresným alebo neodborným prekladom.

Cieľom tohto príspevku je preto ponúknuť kompromis medzi puritánskou rigoróznosťou, keď sa o všeobecnej teórii relativity na stredoškolskej úrovni nedá povedať prakticky nič a prístupom, založenom na podobnosti s prvou známou relativistickej invariantnou teóriou (klasická elektrodynamika). Tento prístup síce nie je fyzikálne úplne korektný, ale je aj stredoškolsky pochopiteľný a adekvátne motivačne pôsobiaci. Výsledkom podobného prístupu je občasná schopnosť napísať aj relevantné vzťahy v zmysluplnom priblížení, bez použitia zložitej matematiky, čím sa snaha o vysvetlenia výsledkov všeobecnej teórie relativity posúva nad rovinu mávania rukami.

Princíp ekvivalencie

Hlavným fyzikálnym východiskom formulácie všeobecnej teórie relativity je princíp ekvivalencie, vyjadrujúci rovnosť gravitačnej a zotrvačnej hmotnosti. Použitá veta je ale presne ten typ viet, ktoré ma ako študenta rozčuľovali, pretože som nedokázal v použitých slovách nájsť (pochopiť) dôvod, prečo princíp najčastejšie vyjadrovaný ako nemožnosť spozorovať vonkajšie homogénne a časovo nemenné gravitačné pole vo voľne padajúcom výťahu, je natoľko dôležitý. V tejto časti sa nebudem pokúšať o hlboké filozofické diskusie samotného princípu ekvivalencie, resp. jeho slabej a silnej formy, ale zameriam sa na výklad, aké dôsledky by sme mohli pozorovať, ak by neplatil. Použité príklady sú určite pochopiteľné aj pre bežného stredoškolača, pretože vyžadujú len znalosť elementárnej dynamiky. Okrem pekných príkladov, diskusia o princípe ekvivalencie ponúka aj množstvo poučení z histórie fyziky (Galileo, 1632, Newton, 1687), zvlášť s ohľadom na rozvoj extrémne citlivých meraní, keď práve overovanie rozdielu medzi zotrvačnou a gravitačnou hmotnosťou dvoch rôznych materiálov (berýlia a titánu) predstavuje asi doteraz najpresnejšie fyzikálne meranie vôbec (Eötvös, 1922, Schlamminger, 2008).

Uvažujme najskôr dve rovnaké nádrže, v ktorých sú umiestnené dve rôzne kvapaliny, napr. voda a lieh. Ak sú obe nádrže v pokoji alebo sa pohybujú rovnomerne a priamočiara¹, potom sú povrchy oboch kvapalín vodorovné, navzájom rovnobežné a kolmé na smer pôsobiacej gravitačnej sily určenej smerom gravitačného zrýchlenia \vec{g} . Ak sa kvapalina v nádrži pohybuje s nenulovým zrýchlením, potom povrch kvapaliny už vodorovný nebude. Elegantným príkladom je rotujúca kvapalina, vytvárajúca parabolický povrch. Riešenie geometrie povrchu rotujúcich kvapalín ale vyžaduje aspoň elementárne vedomosti analytickej geometrie, preto sa obmedzme na najjednoduchší prípad, keď sa celá kvapalina spolu s nádržou, pohybuje s konštantným vodorovným zrýchlením \vec{a} , t.j. kolmým na \vec{g} . Pre každú časť povrchu kvapaliny v tejto nádrži bude výsledná sila \vec{F}_v kolmá na povrch kvapaliny, čo vyjadríme ako

$$\vec{F}_v = \Delta m_z \vec{a} + \Delta m_g \vec{g} \quad (1)$$

kde symbolom Δm sú označené zotrvačná a gravitačná hmotnosť rovnakého, ideálne nekonečne malého, objemu kvapaliny v blízkosti jej povrchu. V uvažovanom prípade konštantného zrýchlenia bude preto mať povrch kvapaliny v nádrži tvar naklonenej roviny so sklonom

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta m_z |\vec{a}|}{\Delta m_g |\vec{g}|} \quad (2)$$

Ak sú gravitačná a zotrvačná hmotnosť rovnaké, potom je náklon povrchu kvapaliny určený len pomerom pôsobiacich zrýchlení. Experimentálnym testovaním závislosti určenej vzťahom (2) môžeme overiť princíp ekvivalencie len veľmi nepresne. Ak však pripustíme neplatnosť princípu ekvivalencie, potom zotrvačná aj gravitačná hmotnosť dvoch rôznych kvapalín sa môže tiež líšiť. Ak sú obe nádrže vystavené rovnakým zrýchleniam \vec{a}, \vec{g} dostávame pre sklony kvapalín indexovaných ako 1,2

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\Delta m_{z1} |\vec{a}|}{\Delta m_{g1} |\vec{g}|} \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\Delta m_{z2} |\vec{a}|}{\Delta m_{g2} |\vec{g}|} \quad (3)$$

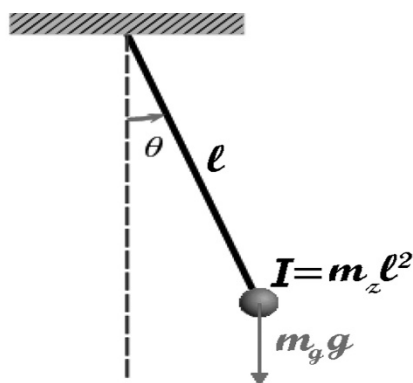
odkiaľ úpravou

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\Delta m_{z1} \Delta m_{g2}}{\Delta m_{g1} \Delta m_{z2}} \quad (4)$$

Podobné relatívne merania síce neoverujú priamo rovnosť zotrvačnej a gravitačnej hmotnosti jednej kvapaliny, ale porovnávajú tieto parametre pre dve rôzne substancie, čím sa však dá dosiahnuť podstatne vyššia presnosť testovania.

Pri reálnom testovaní princípu ekvivalencie sa dnes používajú metodiky, ktoré v základe všetky vychádzajú z mechaniky kyvadiel klasických, ale dnes hlavne torzných. Uvažujme pre začiatok jednoduché matematické kyvadlo s dĺžkou závesu l , na konci ktorého je upevnené malé, ideálne bodové, závažie s gravitačnou hmotnosťou m_g . Na kyvadlo vychýlené o uhol θ pôsobí kolmo dole sila veľkosti $m_g g$, zatiaľ čo moment zotrvačnosti rovnakého telesa pri pohybe po kružnici s polomerom l súvisí so zotrvačnou hmotnosťou tohto telesa ako $m_z l^2$ (viď Obr. 1.)

¹ Na tomto mieste je diskusia o prvom Newtonovom pohybovom zákone viac-menej nevyhnutná.



Obr. 1: Jednoduché matematické kyvadlo.

Aj keď samotná pohybová rovnica matematického kyvadla sa na stredných školách asi detailne nevysvetľuje, z popisu dôsledkov pôsobenia momentu sily pôsobiacej na závažie, pochádzajúceho od gravitačnej sily, môžeme naznačiť súvislosť uhlového zrýchlenia a momentu zotrvačnosti s týmto momentom v tvare

$$m_z l^2 \varepsilon = -m_g g l \sin \theta \quad \text{kde} \quad \varepsilon = \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (5)$$

Z rovnice (5) sa pre malé výchylky θ uvádza aj v stredoškolských učebniciach vzťah pre periódu kmitov matematického kyvadla

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (6)$$

ktorý je ale správny len za predpokladu, že pre hmotnosť vystupujúcu na ľavej a pravej strane rovnice (5) platí $m_z = m_g$. Zovšeobecnením (6) je preto vzťah

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \frac{m_z}{m_g}} \quad (7)$$

Pozorovaním dvoch geometricky identických kyvadiel, čo do dĺžky závesu a tvaru závaží, umiestnených vedľa seba sa dá realizovať relatívne meranie, keď počas dostatočne dlhej doby (mnohých periód kyvadiel) sa sleduje, nakoľko sa rozchádza ich fáza po zvyčajne súčasnom počiatku ich pohybu. Aj tento typ experimentov ale testuje len relatívny rozdiel medzi pomerom zotrvačnej a gravitačnej hmotnosti dvoch rôznych materiálov. Pretože všetky moderné experimenty využívajú, v rôznych obmenách analogický prístup, pre porovnanie ich citlivosti sa používa tzv. Eötvösov parameter η , ktorého definícia vyplýva z úpravy vzťahu (7) pre dva rôzne materiály (1,2), čím dostávame

$$\left(\frac{m_z}{m_g}\right)_{1,2} = \frac{T_{1,2}^2}{(2\pi)^2} \frac{g}{l} \quad \eta_{1,2} = 2 \frac{\left(\frac{m_g}{m_z}\right)_1 - \left(\frac{m_g}{m_z}\right)_2}{\left(\frac{m_g}{m_z}\right)_1 + \left(\frac{m_g}{m_z}\right)_2} = \frac{\Delta T^2}{T^2} \quad (8)$$

kde ΔT je rozdiel periódy kyvadiel odvodený z rozdielu fázy a počtu pozorovaných kmitov.

Prvé experimenty založené na tomto princípe, nevedomujúc si, že takto overuje slabý princíp ekvivalencie, vykonal už v roku 1638 Galileo G., keď pozorovaním oloveného a korkového kyvadla, rovnakej dĺžky a veľkostí závaží, konštatoval, že oba kyvadlá majú rovnakú periódu, aj keď olovené bolo viac ako 100 krát ťažšie. Podobné meranie, už uvedomelo cielené na pozorovanie prípadných rozdielov, vykonal I. Newton (1686), keď porovnával periódy kmitov kyvadiel so zlatým, strieborným, oloveným, skleneným, soľným (NaCl), dreveným, vodným aj pšeničným závažím, umiestneným v nádržkách identickej geometrie na konci 3,3 m závesu. V súčasnosti sa namiesto klasických

kyvadiel používajú torzné kyvadlá a sleduje sa „pád“ rôznych závaží smerom na Slnko. Priekopníkom tejto metodiky bol spomínaný R. Eötvös.

Tab 1: Najdôležitejšie experimenty overujúce slabý princíp ekvivalencie.

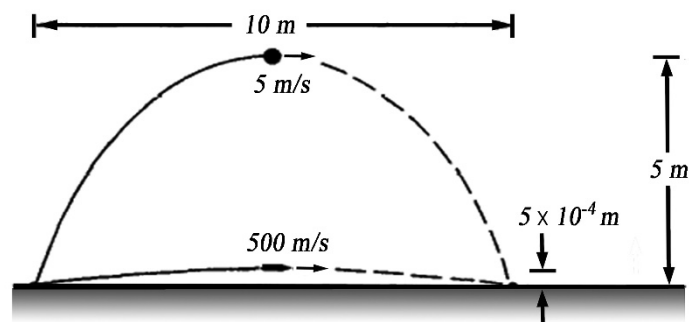
| Autor | rok | materiály | presnosť |
|------------------|------|--|--|
| Galileo G. | 1638 | Pb, korok | $\eta < 2 \times 10^{-3}$ |
| Newton I. | 1686 | Au, Ag, Pb, SiO ₂ , NaCl, H ₂ O, atď. | $\eta < 10^{-3}$ |
| Bessel F. W. | 1889 | Fe, Zn, Pb, Ag, Au, Fe ₃ O ₄ , mramor, hlina, atď. | $\eta < 10^{-5}$ |
| Eötvös R. | 1922 | Pt, Al-Mg (zliat.) | $\eta < 6 \times 10^{-9}$ |
| Braginsky | 1972 | Pt, Al | $\eta < 9 \times 10^{-13}$ |
| Schlaminger S. | 2008 | Be, Ti | $\eta < (0,3 \pm 1,8) \times 10^{-13}$ |
| Microscope, STEP | ??? | | $\sim < 10^{-15}$ až 10^{-17} |

Tabuľka 1. zďaleka nezahŕňa úplný zoznam vykonaných experimentov ale len tie, ktoré boli historicky dôležité, alebo výrazne posunuli dosiahnutú presnosť. V tomto zmysle posledný riadok tabuľky s otáznikmi pri dátume realizácie zodpovedá stále len navrhovaným, resp. pripravovaným družicovým experimentom. Ich očakávaná citlivosť by vďaka realizácii na obežnej dráhe okolo Zeme výrazne posunula dosahovanú presnosť.

Len pre zaujímavosť, ale z pedagogického hľadiska veľmi vhodné, je spomenúť aj experiment vykonaný posádkou Apolla 15 na povrchu Mesiaca, keď jeho veliteľ D. Scott demonštroval, že 1,2 kg hliníkové geologické kladivo a 30 g sokolie pierko padajú rovnako rýchlo. Krásne video je dostupné na viacerých úložiskách na internete, napr.².

Priestorová vs. priestoročasová krivosť

Vo všeobecnej teórii relativity je pôsobenie gravitačných síl (gravitačné pole) spájané s krivosťou priestoročasu, v ktorom toto pôsobenie sledujeme. Ak použijeme rovnaký zdroj gravitačného poľa, napr. našu planétu, potom aj rôzne telesá pohybujúce sa v jej gravitačnom poli by mali demonštrovať rovnakú zakrivenosť priestoročasu v jej okolí.



Obr. 2: Trajektórie lopty a náboja pri šikmom vrhu.

Uvažujme preto, že sa v tomto priestoročase pohybujú dva klasické objekty, prvým nech je pomaly sa pohybujúca lopta s $v_{0x} = 5 \text{ m/s}$ ($v_0 = 11,2 \text{ m/s}$, $\vartheta = 63^\circ$), druhým rýchly náboj $v_{0x} \cong v_0 = 500 \text{ m/s}$ ($\vartheta = 41^\circ$). Z hľadiska obyčajného trojrozmerného priestoru je ich dráhou klasická parabola (odpor vzduchu zanedbávame). Predpokladajme, že oba objekty preletia rovnakú vzdialenosť, povedzme

² http://www.youtube.com/watch?v=-4_rceVPVSY

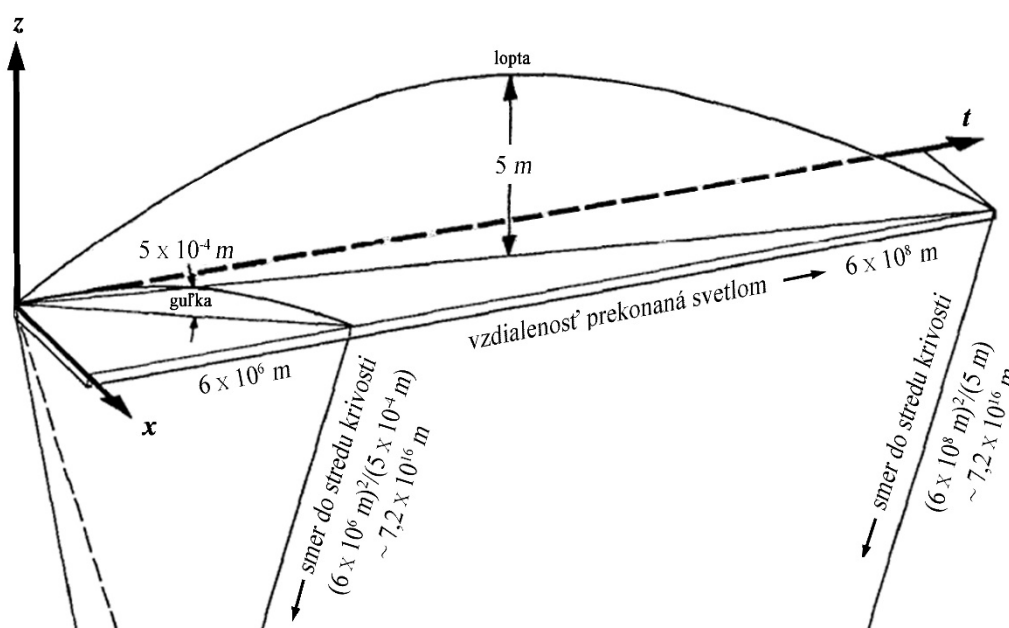
10 m, potom trajektórie ich pohybu budú vyzerat' ako na Obr. 2. Pre maximálnu výšku lopty a náboje sme použili klasické vzťahy

$$d = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha) \quad h = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha \quad t = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha \quad (9)$$

kde d je „dostrel“ pri elevačnom uhle³ α , h maximálna výška letu a t doba letu. Ak by sme sa zamýšľali nad podobnosťou krivosti trajektórií zakreslených na obr. 2, žiadna „podobnosť“ neprichádza do úvahy. Teória relativity ale hovorí o priestoročasovej krivosti, preto skúsme určiť „priestoročasovú“ trajektóriu lopty aj náboja, keď v smere kolmom na x - z rovinu pohybu lopty v 3D priestore pridáme časovú vzdialenosť určenú ako

$$d_{cas} = ct \quad (10)$$

pričom čas t použijeme z posledného vzťahu v (9). V priestoročasovom ponímaní teraz obr. 2. vyzerá ako



Obr. 3 Trajektórie lopty a náboja pri šikmom vrhu v priestoročase.

Ak prirovnáme trajektóriu k časti kružnice, potom pre asociovanú krivosť môžeme použiť pomer (opakovanie Euklidovej vety)

$$R \approx \frac{d^2 \pm c^2 t^2}{h} \quad (11)$$

Znamienko v čitateli rovnice (11) je kladné pre intuitívne pochopenie v zmysle Pythagorovej vety, ale záporné pre puritánov vedy. Ak teraz porovnáme priestoročasový polomer krivosti pre loptu aj náboj zistíme, že sú rovnaké, čo interpretujeme ako skutočnosť, že lopta aj náboj sa pohybujú v rovnako silnom gravitačnom poli (Zemskom gravitačnom poli s intenzitou g). Tento príklad je prerozprávaný podľa úvodu asi najklasickerej učebnice teórie relativity (Misner, 1973).

Gravitačný červený posun

Prvým laboratórnym experimentálnym testom všeobecnej teórie relativity sa stalo meranie červeného posunu v gravitačnom poli Zeme. Gravitačný červený posun bol predpovedaný

³ Výpočet elevačného uhla pre loptu a náboj je v tomto kontexte vhodným opakovaním učiva o niekoľko rokov dozadu. Podobné opakovanie určite nemôže škodiť, pretože aj študenti technicky zameraných fakúlt (FEI STU) mávajú pri podobných úlohách problémy, snáď aj pri štátniciach.

všeobecnou teóriou relativity od jej zrodu, avšak slabosť dostupných gravitačných polí dlho bránila jeho realizácii. Až schopnosť extrémne presného relatívneho merania frekvencie (energie) fotónov, pomocou využitia Mößbauerovho javu rezonančnej absorpcie fotónov atómovým jadrom, umožnila jeho realizáciu (Pound, 1959). Pri tomto experimente sa fotóny s energiou 14,4 keV, vznikajúce pri radioaktívnej premene izotopu ^{57}Co , nechali „padať“ z výšky 22,5 metrov. V spodnej časti experimentálneho systému sa porovnávala ich nová frekvencia (energia) pomocou absorpcie na jadre ^{57}Fe . Pri dosiahnutej 10 % presnosti experimentu bol nameraný výsledok $2\Delta\nu/\nu = (5.13 \pm 0.51) \times 10^{-15}$, kde ν je pôvodná frekvencia emitovaných fotónov a $\Delta\nu$ pozorovaný nárast ich frekvencie. Z pohľadu stredoškolskej fyziky môžeme na tento jav nazerať aj ako na prírastok celkovej energie fotónu pri páde v gravitačnom poli. V nasledujúcich riadkoch sú v tomto zmysle použité aj značne pokrútené pojmy (spôsoby), ktoré plnokrvným relativistom musia nutne podráždiť žĺčník, ale napriek tomu to ako inšpiráciu pre stredoškolákov risknem. Energia emitovaného fotónu súvisí s jeho frekvenciou ako

$$E_{\text{fot_emit}} = h\nu_{\text{emit}} \Rightarrow \nu_{\text{emit}} = \frac{E_{\text{fot_emit}}}{h} \quad (12)$$

Ak čisto formálne prisúdime tejto energii fotónu hmotnosť podľa známeho vzťahu

$$m_{\text{fot}} = \frac{E_{\text{fot_emit}}}{c^2} = \frac{h\nu_{\text{emit}}}{c^2} \quad (13)$$

a túto energiu necháme padať z výšky h v homogénnom gravitačnom poli intenzity g , potom získa dodatočnú energiu

$$\Delta E_{\text{pot}} = mgh = \frac{h\nu_0}{c^2} gh \quad (14)$$

a celková energia týchto fotónov pri dopade bude

$$E_{\text{fot_abs}} = E_{\text{fot_emit}} + \Delta E_{\text{pot}} = h\nu_{\text{emit}} \left(1 + \frac{gh}{c^2} \right) \quad (15)$$

Využívajúc spätne vzťah (12) vyjadríme frekvenciu zachytených fotónov pri absorpcii ako

$$\nu_{\text{abs}} = \frac{E_{\text{fot_abs}}}{h} = \nu_{\text{emit}} \left(1 + \frac{gh}{c^2} \right) \quad (16)$$

a pre rozdiel frekvencie absorbovaných a emitovaných fotónov dostávame

$$\Delta\nu = \nu_{\text{abs}} - \nu_{\text{emit}} = \frac{gh}{c^2} \nu_{\text{emit}} \quad (17)$$

Relatívny posun frekvencie je potom

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_{\text{emit}}} = \frac{gh}{c^2} \approx 2,45 \times 10^{-15} \quad (18)$$

kde numerická hodnota výsledku je vo výbornej zhode s pozorovaním. Na tomto mieste je potrebné ešte raz zdôrazniť, že korektný všeobecno-relativistický výpočet gravitačného červeného posunu sa nezhoduje s načrtnutou špekulatívnou konštrukciou, v ktorej sa miešajú aj úplne nerelativistické prístupy, ale je to pekné motivačné precvičenie rôznych vzťahov.

Gravitačné vlny

Gravitačné vlny, ako jedno z možných riešení rovníc všeobecnej teórie relativity v prázdnom priestore⁴, doteraz neboli priamo experimentálne pozorované, ale o ich existencii svedčia pozorovania zmien obežných dôb v systémoch dvoch (resp. viacerých) kompaktných vesmírnych objektov. Prvá vhodná sústava, dve neutrónové hviezdy tvoriace dvojité pulzar PSR B1913+16, bola objavená už v 1975 roku (Hulse, 1975). Systematické pozorovania počas nasledujúcich 30 rokov

⁴ V Newtonovej teórii gravitácie vlnové riešenia neexistujú. Podobne je to aj v Coulombovskej elektrostatike.

potvrdili, že skracovanie obežnej periódy tohto systému, t.j. vzájomné približovanie neutrónových hviezd, súhlasí s predpoveďou všeobecnej relativity pre straty energie spôsobené vyžarovaním gravitačných vln (Weisberg, 2010). Väčšina súčasných pokusov o registráciu gravitačných vln vychádza z faktu, že tieto priamo ovplyvňujú priestoročas, a preto ich prelet by sa mal prejavíť pri interferencii svetla pohybujúceho sa v dvoch navzájom kolmých ramenách. Hlavným problémom týchto experimentov je úroveň šumov, slabosť (malá intenzita) a veľmi nízka frekvencia gravitačných vln, ktoré k nám z hlbín vesmíru prilietajú. Prípadné experimentovanie s možnými pozemskými zdrojmi gravitačných vln je úplne nerealistické.

Z pohľadu stredoškolskej fyziky je vhodné poznamenať, že gravitačné vlny, rovnako ako každé iné vlnenie, prenášajú energiu, majú periódu a vlnovú dĺžku. Preto aj pre gravitačné vlny môžeme zapísať vzťah

$$s(x,t) = S_{\max} \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \quad (19)$$

kde symbol s reprezentuje oscilujúcu veličinu, T periódu a λ vlnovú dĺžku gravitačnej vlny. Pre priblíženie pôsobenia gravitačných vln je vhodné použiť analógiu s vlnením na vodnej hladine⁵. Plaváček na hladine sa bude pohybovať o amplitúdu S (metrov) hore a dole od priemernej výšky hladiny, pričom jeho pohyb sa bude opakovať každých T (sekúnd) a dva plaváčky od seba vzdialené λ (metrov) sa budú pohybovať synchronne. Pôsobenie prechádzajúcej gravitačnej vlny sa najjednoduchšie interpretuje, ak je smer jej pohybu kolmý na rovinu reálnej hmotnej testovacej kruhovej obruče. V tomto prípade bude výsledkom pôsobenia prechádzajúcej gravitačnej vlny reálna sila, ktorá sa snaží túto obruč roztrhnúť v jednom smere a sploštiť v smere kolmom (na smer rozťahovania). Ak by sme uvažovali nerealisticky silnú gravitačnú vlnu a len málo pevnú obruč, prechádzajúca vlna by ju periodicky (s periódou T) tvarovala do tvaru elipsy, pričom ale celková pôsobiaca sila na celú obruč by bola v každom okamžiku nulová. Analogicky s vlnou na vode, dve obruče vzdialené o λ by sa tiež deformovali synchronne. Amplitúda gravitačnej vlny má rozmer sily na jednotku hmotnosti. Rýchlosť pohybu gravitačných vln je rovnaká ako rýchlosť pohybu elektromagnetických vln vo vákuu (c), aj keď na potvrdenie tohto teoretického výsledku máme len relatívne slabé indície. Podobne ako všetky vlnenia, aj gravitačné vlnenie je schopné prenášať energiu.

Rôzne ďalšie podobnosti medzi elektromagnetickým⁶, akustickým, mechanickým vlnením na lanách ponúkajú ďalšie analógie použiteľné pre priblíženie gravitačných vln aj na úrovni stredných škôl.

Ohyb svetla v gravitačnom poli a gravitačné šošovky

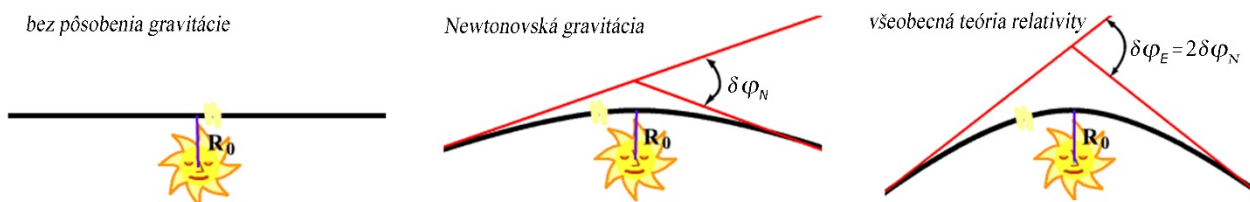
Dôležitým a jedným z prvých experimentálne verifikovaných dôsledkov všeobecnej teórie relativity je zmena smeru pohybu svetla (elektromagnetickej vlny) v okolí hmotných objektov. Ak by sme sa uchýlili k rovnako hrubému priblíženiu ako v časti venovanej gravitačnému červenému posunu, odklon svetla by sme interpretovali ako „padanie“ fotónov pri pohybe okolo hmotného objektu. Týmto spôsobom určený odklon je

$$\delta \varphi = \frac{2GM}{c^2 R_0} \quad (20)$$

kde M je hmotnosť objektu, R_0 najmenšia vzdialenosť medzi stredom hmotného objektu a trajektóriou svetla bez pôsobenia gravitácie (viď Obr. 4) a G univerzálna (Newtonova) gravitačná konštanta

⁵ Skutočnosť, že vlny na vode majú charakter nelineárnych vln (solitónov) a sú kombináciou priečnych aj pozdĺžnych vln, pre účely tohto príkladu môžeme ignorovať.

⁶ Pri prechode elektromagnetických vln sa voľné náboje v anténe periodicky pohybujú, vytvárajú napätie, pričom vlna takto stráca časť svojej energie. Prostredníctvom energie odovzdanej anténe vzniká signál spracovávaný na zvuk, obraz, dáta. atď.



Obr. 4: Lúč svetla v okolí hmotného objektu.

V kontexte všeobecnej teórie relativity však svetlo „nepadá“ ale pohybuje sa po tzv. geodetickej krivke, ktorá predstavuje najkratšiu priestoročasovú vzdialenosť medzi dvoma udalosťami⁷ a výpočty predpovedajú odklon 2x väčší ako udáva vzťah (20). Pozorovania vzájomnej uhlovej vzdialenosti hviezd pri zatmení Slnka, keď ich svetlo tesne míňalo Slnko s jeho veľkou hmotnosťou, v porovnaní s normálnym nočným pozorovaním potvrdili, že správnou hodnotou je predpoveď všeobecnej teórie relativity (Edington, 1920). Analogické situácie sa vo vesmíre vyskytujú aj v podstatne väčšej mierke. Svetlo veľmi vzdialených aktívnych galaxií (kvazarov) je podobne ohýbané galaxiami, ktoré sa nachádzajú medzi jeho zdrojom a nami. Takáto situácia je analogická sústreďovaniu svetla šošovkou. Pozorovanie vesmírnych gravitačných šošoviek sa preto využíva jednak na sledovanie veľmi slabých a veľmi vzdialených objektov, keď takto fungujú ako prirodzené vesmírne refraktory, ale aj na určovanie množstva tmavej hmoty v galaxiách, keďže všetky formy hmoty s nenulovou gravitačnou hmotnosťou prispievajú do celkového efektu.

Skôr pre pobavenie ako reálne experimentovanie, je možné podobný efekt „simulovať“ rovným a do kužela zahnutým papierom, s hmotným objektom v strede kužela. Priamky narysované pravítkom na rovnom papieri medzi dvoma „hviezdami“ a pozorovateľom, budú zvierat istý uhol na rovnom papieri ale väčší na kuželovito ohnutom.

Schwarchildovská čierna diera

O čiernych dierach, ako mysterióznych objektoch, z ktorých nedokáže uniknúť ani svetlo, spájaných s tými najextrémnejšími hustotami, vymykajúcich sa bežnej ľudskej pozorovacej skúsenosti, uvažovali Michell a Laplace už koncom 18. storočia (Michell, 1784, Laplace, 1796), keď ich označovali ako temné hviezdy. Pri svojich úvahách samozrejme vychádzali z Newtonovskej teórie gravitácie a už známej konečnej rýchlosti svetla. V súčasnosti je charakteristický polomer statickej, nerotujúcej, nenabitej čiernej diery spájaný so singularitou priestoročasového intervalu

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (21)$$

odkiaľ pre tzv. Schwarchildov polomer dostávame

$$R_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (22)$$

kde M je celková hmotnosť objektu. Zjednodušený prístup založený na Newtonovskej teórii gravitácie pozoruhodne vedie k rovnakému výsledku, a je pochopiteľný aj pre bežného stredoškólačka. Aj v tomto prípade je nasledovný postup vhodnou motiváciou aj precvičením klasických fyzikálnych pojmov. Najskôr určíme únikovú (2. kozmickú) rýchlosť na povrchu hmotného objektu s hmotnosťou M a polomerom R , vychádzajúc zo zákona zachovania mechanickej energie v gravitačnom poli ako

⁷ Počiatočný a konečný stav ľubovoľného deja v priestoročase je charakterizovaný nielen ich priestorovou, ale aj časovou vzdialenosťou, preto sa na identifikáciu používa pojem udalosť a nie bod.

$$\frac{1}{2}mv_{2k}^2 = m \left(-\frac{GM}{\infty} - \left(-\frac{GM}{R} \right) \right) \quad (23)$$

odkiaľ pre únikovú rýchlosť dostávame

$$v_{2k} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (24)$$

Ak formálne postavíme únikovú rýchlosť rovnú rýchlosti svetla dostávame z (24) priamo (22). Ak budeme ale ďalej pokračovať v podobných jednoduchých výpočtoch, môžeme sa pokúsiť určiť priemernú hustotu takého objektu. Pre sféricky symetrický, homogénny objekt dostávame z definície hustoty

$$\rho_k = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R_g^3} = \frac{3c^6}{32\pi G^3} \frac{1}{M^2} \quad (25)$$

Na základe vzťahu (25) skutočne dostávame pre objekty hmotnosti hviezd obrovské hustoty, ale ak budeme uvažovať hmotnosť skupiny galaxií (alebo celého vesmíru) vypočítaná priemerná hustota môže vychádzať aj veľmi malá. Aj keď sú podobné úvahy veľmi zjednodušené, koncepčne predstavujú rovnaký postup, aký sa používa pri úvahách o kritickej hustote vesmíru a s ňou spojenými predstavami o evolúcii vesmíru.

Sily v elektrodynamike a gravitácii

Táto aj nasledujúca časť sú venované výkladu, ako sa dajú využiť známe výsledky z elektrodynamiky aj v gravitácii, stále na úrovni lepšej strednej školy. Načrtnutý prístup je úplne opodstatnený, pretože všeobecná teória relativity sa pre prípad ľahkých⁸ a pomaly sa pohybujúcich objektov dá formulovať vo formalizme úplne analogickom Maxwellovskej elektrodynamike. Pochopenie týchto analógií však vyžaduje hlbší záujem a rozhľad, preto je použiteľný len pre skutočne nadaných a zaniietených študentov.

V klasickej elektrodynamike popisujeme elektrické pole statického bodového náboja Q jeho intenzitou v tvare

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r} \quad (26)$$

V okolí vodiča, ktorým tečie prúd I má zasa magnetické pole indukciou

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \vec{e} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{I}{r} \vec{e} \quad (27)$$

kde sme magnetickú permeabilitu nahradili kombináciou elektrickej permitivity a rýchlosti svetla s cieľom upozorniť čitateľa na skutočnosť, že pre popis elektromagnetických interakcií síce potrebujeme dve konštanty, ale za jednu z nich je vhodné zvoliť práve fázovú rýchlosť asociovaného vlnenia. Celková sila pôsobiaca na pohybujúci sa náboj q je v elektrodynamike

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (28)$$

Ak dosadíme intenzitu elektrického poľa podľa (26) do (28) získame pre elektrickú časť sily výraz známejší pod označením Coulombov zákon. Asi nikto nezapochybuje o podobnosti Coulombovho zákona a Newtonovho gravitačného zákona pre bodové zdroje

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^3} \vec{r} \quad \vec{F}_g = -G \frac{m_g M_g}{r^3} \vec{r} \quad (29)$$

⁸ Označenie „ľahký objekt“ neslobodno brať doslovne. Označujeme ním objekt oveľa ľahší ako je hmotnosť typických hviezd.

a v tomto kontexte vyvstáva otázka, či existuje v gravitácii aj „magnetická“ časť gravitačnej sily. Spomínané priblíženie pre pomaly sa pohybujúce ($v \ll c$), ľahké objekty by v analógii s (27), (28) malo viesť k vzťahu

$$\vec{F}_{gd} = m_g \vec{v} \times \vec{B}_{gd} \quad (30)$$

kde m_g je gravitačná hmotnosť objektu pohybujúceho sa rýchlosťou \vec{v} v gravidynamickom poli \vec{B}_{gd} . Indexovanie gd aj označenie „gravidynamické“ je častejším synonymom „magnetickej“ zložky gravitačného pôsobenia. Opäť v analógii s magnetickou indukciou (27) vieme pre gravidynamickú indukciu písať

$$\vec{B}_{gd} = \frac{2G}{c^2} \frac{\gamma}{r} \vec{e} \quad (31)$$

kde γ je tok (prúd) hmotnosti s rozmerom kg/s.

Silové pôsobenie dvoch rúr s kvapalinou

Úvahy z predchádzajúcej kapitoly môžeme teraz rozvinúť do konkrétneho príkladu vzájomného gravitačného pôsobenia dvoch rúr naplnených tečúcou kvapalinou. Zjavne pôjde o analógiu Ampérovho zákona vzájomného pôsobenia dvoch vodičov, v ktorých tečie elektrický prúd, používaný v definícii jednotky prúdu.

Uvažujme dve rovnaké rovnobežné rúry prierezu S , ktorých stredy sú vzdialené d , v ktorých sa pohybuje kvapalina s hustotou ρ , rýchlosťou v , čomu zodpovedá hmotnostný tok

$$\gamma = \rho S v \quad (32)$$

Nech hmotnosť materiálu rúr samotných je v porovnaní s kvapalinou v nich obsiahnutou zanedbateľná a tiež nech polomer (veľkosť) rúr je oveľa menšia ako ich vzájomná vzdialenosť ($\sqrt{S} \ll d$). Ak je kvapalina v aspoň jednej z rúr v pokoji, potom medzi zvolenými časťami rúr pôsobí len „klasická“ príťažlivá gravitačná sila, ktorú ale nevieme bez presného integrovania vyjadriť. Zvoľme preto niekde uprostred oboch rúr krátky kúsok dĺžky L , z každej rúry jeden, presne vedľa seba, a študujme len sily medzi vybranými časťami rúr. V uvažovanej geometrii a pri použitých zanedbaniach bude táto sila rovná

$$F_g = 2G \frac{(\rho S)^2 L}{d} \quad (33)$$

Ak sa ale kvapaliny v oboch rúrach pohybujú, potom jednu z nich môžeme považovať za zdroj gravidynamického poľa, ktoré pôsobí na pohybujúcu kvapalinu v druhej, resp. vice versa. Gravidynamické pole pôsobí len na pohyblivé hmotné objekty, analogicky pôsobeniu magnetického poľa na pohybujúce náboje. Uplatňujúc analógiu so vzťahom (27) píšeme pre gravidynamickú indukciu

$$B_{gd} = \frac{2G}{c^2} \frac{\rho S v}{d} \quad (34)$$

a gravidynamickú silu (analógia s vyjadrením sily pôsobiacej na vodič v magnetickom poli)

$$F_{gd} = B_{gd} \gamma L = B_{gd} \rho S v L = \frac{2G}{c^2} \frac{(\rho S v)^2}{d} L \quad (35)$$

alebo zovšeobecnene

$$F_{gd} = \frac{2G}{c^2} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{d} L \quad (36)$$

Hmotnostné toky γ_1 , γ_2 môžu mať rôzne znamienka, čo vyjadruje smer tečenia kvapaliny v rúrach. Gravidynamická sila, podobne ako Ampérova sila, môže byť príťažlivá aj odpudivá⁹. Porovnaním vzťahov (33) a (36) vidíme, že gravidynamické efekty sú veľmi slabé, slabšie o faktor $(v/c)^2$ oproti už aj tak najslabšej interakcii charakterizovanej hodnotou konštanty $G = 6,6 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$. V tomto kontexte nezabudnime, že použitý formalizmus je dôsledkom všeobecnej teórie relativity len pre malé rýchlosti v . Je preto skutočne pozoruhodné, že dnes už máme priamy experimentálny dôkaz existencie gravidynamických síl. Využívajúc rotáciu Zeme ako zdroja gravidynamického poľa a rýchlo rotujúcich zotrvačiek umiestnených na umelej družici Gravity Probe B, bola pozorovaná precesia týchto zotrvačiek, vyvolaná práve pôsobením popisovaných dynamických prejavov gravitácie (Everitt, 2011).

Záver

Načrtnuté možnosti priblíženia problematiky všeobecnej teórie relativity pre študentov stredných škôl si kladú za cieľ predovšetkým motivovať nadaných študentov. Aj keď viaceré použité postupy sú slušne povedané krkolomné, autor sa domnieva že nepredstavujú hrozbu dezorientácie študentov pri ďalšom precíznom štúdiu tejto problematiky.

Podakovanie

Ruky bozkávame agentúre KEGA za podporu projektu "Nové výzvy fyzikálneho vzdelávania na technických univerzitách" KEGA 031STU-4/2013.

Literatúra

- BRAGINSKY V.B., PANOV V.I. V. B. 1972. *Verification of the equivalence of inertial and gravitational mass*. Journal of Experimental and Theoretical Physics vol. 34, 463, 1972
- EDDINGTON A.S. 1920. *Space Time and Gravitation*, Cambridge University Press, Cambridge, 1920
- EÖTVÖS R., PEKÁR D., FEKETE E. 1922. *Beitrag zum Gesetze der Proportionalität von Trägheit und Gravität*. Ann. der Phys. (Leipz.) vol. 68, s. 11-66, 1922
- EVERITT C.W.F., et al. 2011. *Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity*. Phys. Rev. Lett. vol 106, 221101, 2011
- HULSE R.A., TAYLOR J.H. 1975. *Discovery of a Pulsar in a Binary System*. Astrophys. J. vol. 195, L51, 1975
- GALILEO G. L. 1632. *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo Tolemaico, e Copernicano*. Fiorenza, 1632
- LAPLACE P.S. 1796. *Exposition du Systeme du Monde*. Cambridge University Press, Cambridge 1796
- MISNER C.W., THORNE K.S., WHEELER, J.A. 1973. *Gravitation*. 3rd ed. San Francisco, W.H. Freeman & comp., 1973
- MICHELL J. 1784. *On the Means of Discovering the Distance, Magnitude, & c. of the Fixed Stars, in Consequence of the Diminution of the Velocity of Their Light, in Case Such a Diminution Should be Found to Take Place in any of Them, and Such Other Data Should be Procured from Observations, as Would be Farther Necessary for That Purpose*. Transactions of the Royal Society vol. 74, 35, 1784
- NEWTON I. 1687. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Cantabrigiae, 1687
- POUND R., REBKA G. 1959. *Gravitational Red-Shift in Nuclear Resonance*. Phys. Rev. Lett. vol. 3, 439, 1959.

⁹ Vo vzťahoch (34) až (36) voľba geometrie a použité priblíženia zabezpečujú, že vyjadrené absolútne hodnoty indukcie aj síl v sebe už zahŕňajú nevyhnutné vektorové súčiny, resp. zužovanie tenzorov v exaktne relativistickom prístupe.

SCHLAMMINGER S., CHOI K.Y., WAGNER T.A., GUNDLACH J.H., ADELBERGER E.G. 2008. *Test of the Equivalence Principle Using a Rotating Torsion Balance*. Phys. Rev. Lett. vol. 100, 041101, 2008
WEISBERG J.M, NICE D.J., TAYLOR J.H 2010. *Timing Measurements of the Relativistic Binary Pulsar PSR B1913+16*. Astrophys. J. vol. 722, 1030, 2010

Adresa autora

Pavol Valko, doc. RNDr., CSc.

Oddelenie fyziky, Ústav jadrového a fyzikálneho inžinierstva

Fakulta elektrotechniky a informatiky, Slovenská technická univerzita

Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava

valko@elf.stuba.sk