

## NÁVRH IMPLEMENTÁCIE MATEMATICKÉHO MODELOVANIA DO VÝUČBY FYZIKY NA GYMNÁZIU

**Veronika Timková, Zuzana Ješková**

Oddelenie didaktiky fyziky ÚFV PF UPJŠ v Košiciach

**Abstrakt:** *V tomto príspevku predstavíme súbor úloh zameraných na matematické modelovanie na počítači spolu s návrhom ich zaradenia do výučby fyziky na gymnáziu. Pripravené aktivity postupujú od najjednoduchších, kde sa žiaci učia pracovať s matematickým modelovaním, až po zložitejšie, kde žiaci riešia matematicky náročnejšie úlohy s využitím metódy dynamického modelovania. Túto zbierku sme pripravili k zaradeniu do výučby prvého ročníka gymnázia v tematickom celku Sila a pohyb pri časovej dotácii 3 hodiny fyziky do týždňa a v redukovanej verzii pre triedy s časovou dotáciou 2 hodiny fyziky do týždňa.*

**Kľúčové slová:** matematické modelovanie, modelovanie na počítači, digitálne technológie, inovatívne metódy výučby fyziky, IBSE

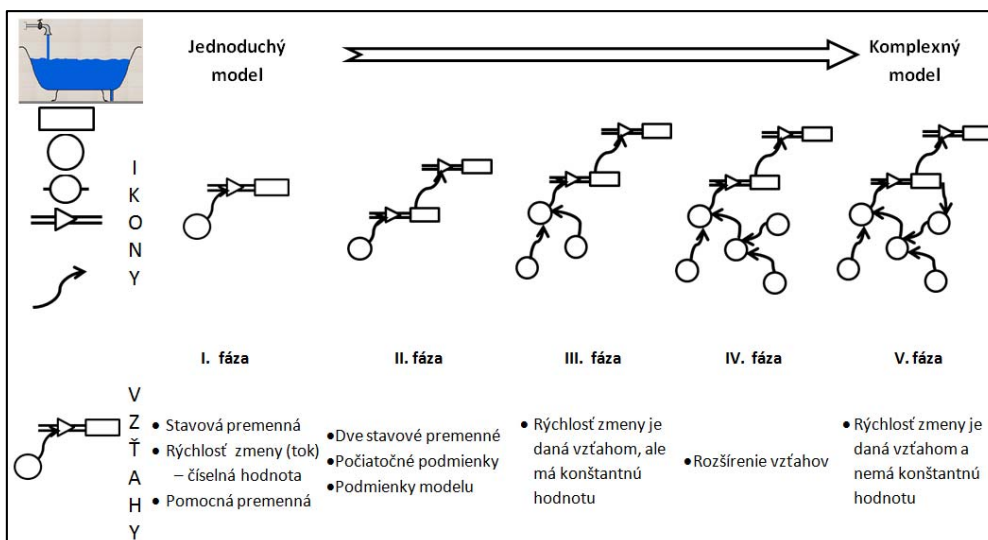
### Úvod

Od spustenia školskej reformy sa výrazný dôraz v oblasti prírodovedného vzdelávania kladie na rozvoj zručností, spôsobilostí spojených s aktívnym prírodovedným bádáním. Žiak, okrem osvojenia si obsahu, by mal na vyučovacích hodinách zažiť aktivity, ktoré pripomínajú prácu vedca, čo znamená činnosti spojené s experimentovaním a tvorbou modelov a teórií správania sa javov a objektov okolo nás. V súvislosti s tvorbou modelov a teórií ide predovšetkým o matematické modelovanie, kde je dnes už samozrejmosťou matematické modelovanie na počítači. Pri pohľade do štátneho vzdelávacieho programu ISCED 3 pre fyziku sa však pojem matematické modelovanie explicitne nespomína. Nepriamo môžeme matematické modelovanie nájsť v cieľoch predmetu fyzika, kde sa medzi ciele zaradzuje opísanie spôsobov, ako prírodné vedy pracujú; formulovanie a testovanie hypotéz v podmienkach riadenia premenných veličín; organizovanie, prezentovanie a vyhodnocovanie dát rôznymi spôsobmi a vytváranie predpovedí založených na dátach (ŠPÚ, 2011a). Modelovanie sa tiež nachádza v cieľových požiadavkách na maturitu z fyziky. Konkrétne v oblasti Aplikácia má byť žiak schopný pracovať s počítačom v oblasti matematického modelovania fyzikálnych situácií, fyzikálnych závislostí a spracovania výsledkov fyzikálnych meraní (ŠPÚ, 2011b). Rovnako ako modelovanie absentuje v štátnom vzdelávacom programe, chýbajú aj systematické metodické materiály, ktoré by pomohli implementácii modelovania do školskej praxe. Preto sme sa rozhodli pripraviť aktivity zamerané na matematické modelovanie na počítači a taktiež navrhnuť ako ich implementovať do výučby fyziky na gymnáziu.

### Metodika implementácie matematického modelovania na počítači

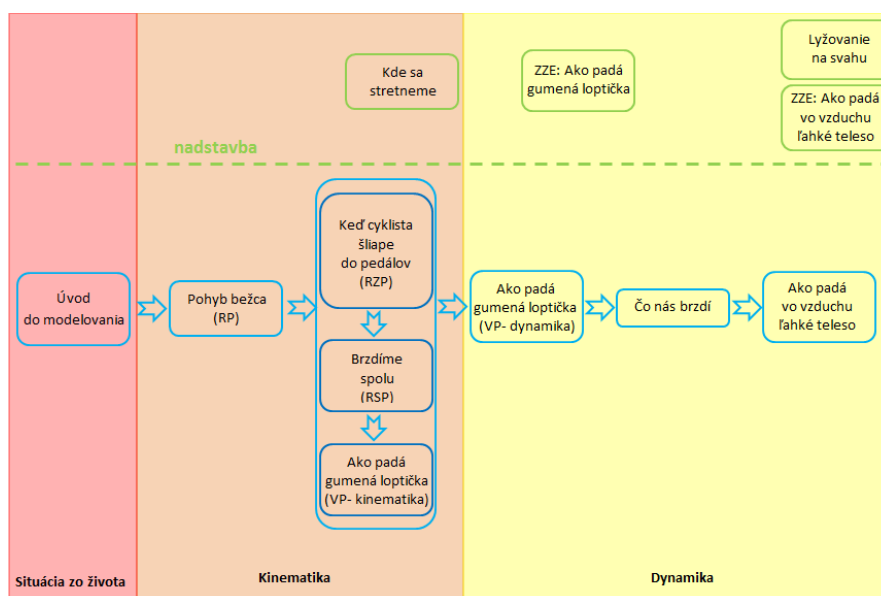
Ak hovoríme o matematickom modelovaní na počítači, máme na mysli predovšetkým tvorbu matematických modelov metódou dynamického modelovania vo vhodnom počítačovom prostredí, napr. COACH. Pre žiakov nižších ročníkov gymnázia je určená jeho ikonografická verzia, kde sú premenné a vzťahy medzi nimi reprezentované obrazovými symbolmi. Tento nástroj umožňuje tvoriť modely jednoduchých ale aj zložitejších javov bez znalosti náročného matematického aparátu. Zároveň umožňuje porovnávať vytvorený model s dátami získanými z experimentu. Takýto postup je prirodzenou činnosťou vedca a môže sa v primerane zjednodušenej podobe stať aj súčasťou činnosti žiaka na hodinách fyziky.

Cieľom navrhnutej metodiky je rozvinúť u žiakov schopnosti rozumieť matematickým modelom ako aj zručnosti samostatne model fyzikálnej situácie upraviť, resp. vytvoriť. Metodika je navrhnutá tak, aby žiak prešiel od jednoduchého modelu jemu blízkej bežnej situácie až k zložitejším modelom (obr.1).



Obr.1: Postupný prechod od jednoduchých modelov ku komplexným

Dôležité je aby sme žiakov v krátkom časovom intervale nezahtli množstvom informácií. Preto sme navrhli súbor aktivít, pri ktorých sa žiaci postupne z aktivity na aktivitu oboznamujú so stále novšími prvkami matematického modelu. Ako vhodný tematický celok pre takéto aktivity sa ukazuje téma Sila a pohyb, resp. kinematika a dynamika. Tu sme aj situovali nami vytvorené aktivity, pričom každá postupne posúva modelovacie schopnosti žiakov na vyššiu úroveň. Pri aktivite *Úvod do modelovania* sa žiaci oboznámia so samotným modelovaním na im blízkej situácii napúšťania vane, následne svoje poznatky o premenných a vzťahoch medzi nimi prevedú na model rovnomerného pohybu v aktivite *Pohyb bežca* (obr.1: I. fáza). Ten ďalej rozširujú až prídu k modelu rovnomerne zrýchleného pohybu, kde v aktivitách *Keď cyklista šliape do pedálov*, *Brzdíme spolu* a *Ako padá gumená loptička* (kinematika) postupne menia podmienky modelu a vstupné veličiny (obr.1: II. fáza). Následne prechádzajú žiaci aktivitou *Ako padá gumená loptička* (dynamika) kde už zadávajú veličiny nielen pomocou číselných hodnôt ale aj pomocou fyzikálnych vzťahov (obr.1: III. fáza), ktoré medzi veličinami platia a tak postupujú k aktivitám *Čo nás brzdí* (obr.1: IV. fáza) a *Ako padá vo vzduchu ľahké teleso* (obr.1: V. fáza), kde sa tieto fyzikálne vzťahy ďalej rozširujú (obr.2).



Obr.2: Výučbový scenár implementácie matematického modelovania na počítači v téme Sila a pohyb.

## Aktivity

V tejto časti predstavíme aktivity k matematickému modelovaniu na počítači pripravené pre implementáciu modelovania na gymnáziu v tematickom celku Sila a pohyb (obr. 2). Ku každej aktivite je pripravený metodický materiál spolu s pracovným listom a hotovou aktivitou v systéme Coach spolu so vzorovým výsledkom, ktorý možno využiť aj ako simuláciu. K väčšine aktivít existujú aj rovnomenné aktivity zamerané na meranie modelovaného javu na videozázname. Tieto experimentálne dáta slúžia na overenie správnosti vytvoreného modelu. V ideálnom prípade by mali žiaci najskôr absolvovať aktivitu s videomeraním resp. reálnym meraním a následne na základe svojich zistení vytvoriť model situácie a porovnať ho s nameranými dátami. V prípade nižšej časovej dotácie na hodiny fyziky je možné zredukovať aktivitu videomerania na motivačný problém na úvod modelovania, kde žiakom frontálne video prehráme a v interaktívnej diskusii so žiakmi analyzujeme pohyb, ktorý teleso vykonáva a z toho plynúce grafické závislosti polohy od času. Následne už žiaci pokračujú podľa pripravených pracovných listov pre modelovanie.

## Úvod do modelovania

Táto aktivita je prioritne určená k zavedeniu pojmu a techniky modelovania na strednej škole. Predstavuje hotový model vane, ktorý je súčasťou knižnice systému Coach. Ide o model napúšťania a vypúšťania vody z vane, pričom žiaci pracujú s hotovým modelom na úrovni simulácie. Cieľom aktivity je zoznámiť žiakov s modelovacím prostredím systému Coach, zistiť čo predstavujú základné ikony modelu, t.j. stavová premenná (objem vody vo vani), premenná tok (prítok, resp. odtok, t.j. objem vody, ktorá pritečie, resp. odtečie za minútu) a ich vzájomné prepojenie (objem vody vo vani sa mení s časom, keďže do nej voda priteká, resp. odteká istou rýchlosťou), čo predstavuje základ každého dynamického modelu.

## Pohyb bežca

Aktivita nadväzuje na úvodnú aktivitu modelu vane, pričom žiaci na základe analógie vytvoria model pohybu bežca, ktorý beží konštantnou rýchlosťou. Aktivita je prepojená s videomeraním rovnomerného pohybu myšky. V tabuľke 1 sú zobrazené analogické veličiny modelu napúšťania vane a pohybu bežca. Tak ako je príčinou zmeny objemu vody vo vani veličina prítok, príčinou zmeny polohy bežca je jeho rýchlosť, pričom ako prítok, tak aj rýchlosť bežca sú v tomto prípade konštantné.

Tab.1: Analógia medzi napúšťaním vane a pohybom bežca

Prvky modelu	Model vaňa	Rovnomerný pohyb
Stavová premenná	Objem vody vo vani $V$	Dráha bežca $s$
Premenná toku	Prítok (rýchlosť, s akou sa mení objem)	Rýchlosť (rýchlosť akou sa mení dráha)
Vzťah	$V(t+dt) = V(t) + \text{prítok} \cdot dt$	$s(t+dt) = s(t) + \text{rýchlosť} \cdot dt$
Pomocná premenná	Prítok	Rýchlosť

## Keď cyklista šliape do pedálov

Táto aktivita je prepojená s videomeraním rozbiehajúceho sa cyklistu, ktorého rýchlosť rovnomerne rastie. Úlohou žiakov je upraviť model pohybu bežca na model rozbiehajúceho sa cyklistu. V tomto prípade už rýchlosť nie je konštantná, počas pohybu sa mení, t.j. stáva sa stavovou premennou. To ako rýchlo sa mení rýchlosť určuje veličina zrýchlenie (premenná toku), ktorá je konštantná (obr.1: II. fáza).

## Brzdíme spolu

Táto aktivita je prepojená s videomeraním brzdiaceho cyklistu, ktorého rýchlosť rovnomerne klesá. Cieľom aktivity je zistiť, či žiaci správne chápu fyzikálne veličiny vstupujúce do modelu rovnomerne zrýchleného pohybu a ako tento model transformovať na model pohybu rovnomerne spomaleného. Zároveň žiaci konfrontujú svoje poznatky o rovnomerne spomalenom pohybe s grafickými závislosťami ako výstupom

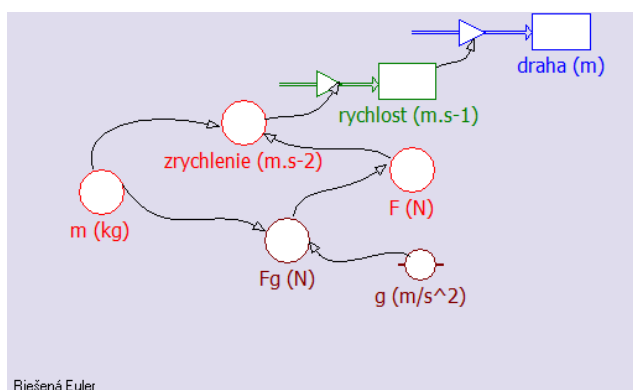
modelovania a určujú podmienky, kedy má ešte model zmysel (obr.1: II. fáza), t.j. zadávajú podmienky pre ukončenie výpočtu modelu (napr. ak klesne hodnota rýchlosti telesa na nulu).

### Stretávacie úlohy

Aktivitu stretávacie úlohy môžeme prioritne využiť ako simuláciu, pri ktorej si žiaci precvičia resp. sa naučia, ako funguje riešenie takéhoto typu úloh grafickou metódou. Veľkou výhodou tohto použitia je okamžitá spätná väzba vo forme grafov. Žiaci tak môžu preskúmať množstvo situácií v relatívne krátkom čase. Zároveň pri riešení úloh samostatne si žiaci môžu precvičiť tvorbu modelov v rôznych fyzikálnych situáciách.

### Ako padá gumená loptička?

Táto aktivita je prepojená s videomeraním pádu gumenej loptičky, na základe ktorého žiaci odmerajú závislosť prejdenej dráhy loptičky od času počas pádu. Vytvorením modelu pádu následne zisťujú aký pohyb padajúca loptička vykonáva. Žiaci tvoria model rovnomerne zrýchleného pohybu, pričom zistia, že loptička sa pohybuje so zrýchlením rovným gravitačnému zrýchleniu (obr.1: II. fáza). Zároveň je táto aktivita prvou, pri ktorej prechádzame od modelovania kinematických veličín (poloha – dráha, rýchlosť, zrýchlenie) k modelom, kde vystupuje sila ako príčina zmeny pohybového stavu telies (obr.1: III. fáza). Žiaci vkladajú do modelu veličinu sila, pričom ju na základe platnosti II. Newtonovho zákona prepájajú s veličinou zrýchlenie (obr.3).



Obr.3: Model pádu loptičky z dynamického hľadiska

### Čo nás brzdí?

Táto aktivita môže nadväzovať na laboratórne cvičenie súvisiace s trecou silou. Situácia popisuje pohyb telesa pri pôsobení ťahovej sily a trecej sily, ktorá je konštantná a pôsobí proti pohybu. Žiaci konštruujú model, pričom zrýchlenie telesa prepájajú s výslednou pôsobiacou silou zloženou z týchto dvoch síl. Aktivita smeruje k hlbšiemu pochopeniu II. Newtonovho zákona a uvedomenie si faktu, že zrýchlenie udeľuje telesu výsledná pôsobiaca sila (obr.1: IV. fáza).

### Ako padá vo vzduchu ľahké teleso?

Aktivita nadväzuje na videomeranie pádu ľahkého telesa. Žiaci najprv analyzujú pohyb polystyrénovej loptičky na videozázname. Následne vytvárajú model pádu tohto telesa, pričom porovnaním s experimentálnymi výsledkami zisťujú, že skôr vytvorený model pádu gumenej loptičky pohybu polystyrénovej loptičky neodpovedá. Model následne upravujú doplnením ďalšej sily (odpor vzduchu), ktorá zrejme na loptičku počas pohybu pôsobí. V ďalšom zisťujú, od čoho táto sila závisí. Aktivita ilustruje prípad pohybu, kedy výsledná sila, pôsobiaca na teleso nie je konštantná ale sa mení (postupne klesá), čo je situácia, ktorú žiaci gymnázia matematicky popísať nedokážu (obr.1: V. fáza). Tu sa práve ukazuje význam dynamického modelu, ktorý dokáže predpovedať správanie sa loptičky.

### Lyžovanie na svahu

Ide o komplexnú úlohu, ktorá je rozdelená do viacerých úrovní:

- pohyb po naklonenej rovine bez pôsobenia trecej a odporovej sily,
- pohyb po naklonenej rovine za pôsobenia trecej a bez pôsobenia odporovej sily,
- a pohyb po naklonenej rovine za pôsobenia trecej a odporovej sily.

Aktivita je rozšírená aj o animáciu pohybu.

### Zákon zachovania energie – Ako padá gumená loptička?

Ide o doplnkovú aktivitu k aktivite *Ako padá gumená loptička*. Úlohou žiakov je upraviť model tak, aby počítal ako sa počas pohybu mení kinetická, potenciálna a celková mechanická energia padajúcej loptičky.

### Zákon zachovania energie – Ako padá vo vzduchu ľahké teleso?

Podobne ako predchádzajúca aktivita aj táto je nadstavbou k aktivite *Ako padá vo vzduchu ľahké teleso*. Úlohou žiakov je opäť upraviť model tak, aby počítal ako sa počas pohybu mení kinetická, potenciálna a celková mechanická energia padajúcej polystyrénovej loptičky. Klesajúcu závislosť celkovej mechanickej energie môžeme použiť ako námet na diskusiu o podmienkach platnosti zákona zachovania mechanickej energie, či ako problémovú úlohu.

### Návrh implementácie do výučby fyziky

Ako bolo už vyššie spomenuté, vhodným tematickým celkom na implementáciu aktivít zameraných na matematické modelovanie je Sila a pohyb. Keďže podľa školskej reformy si školy môžu upraviť hodinovú dotáciu pre jednotlivé predmety, navrhli sme minimum, ktorého zaradenie ešte považujeme za efektívne a postačujúce pre pochopenie metódy matematického modelovania na počítači (tab.2). Pri vyššej časovej dotácii je vhodné zaradiť aj nadstavbové aktivity (tab.2.)

Tab. 2: Navrhované modelovacie aktivity pre rôznu časovú dotáciu na hodiny fyziky

2h fyziky do týždňa	3h fyziky do týždňa
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Úvod do modelovania</li> <li>• Pohyb bežca (RP) + videomeranie</li> <li>• Keď cyklista šliape do pedálov (RZP)</li> <li>• Brzdíme spolu (RSP)</li> <li>• Ako padá gumená loptička? (kinematicky , dynamicky)</li> <li>• Čo nás brzdí?</li> <li>• Ako padá vo vzduchu ľahké teleso?</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Úvod do modelovania</li> <li>• Pohyb bežca (RP) + videomeranie</li> <li>• Keď cyklista šliape do pedálov (RZP) + videomeranie</li> <li>• Brzdíme spolu (RSP)</li> <li>• Kde sa stretneme (Stretávacie úlohy)</li> <li>• Ako padá gumená loptička? (kinematicky , dynamicky) + videomeranie</li> <li>• Čo nás brzdí?</li> <li>• Ako padá vo vzduchu ľahké teleso? + videomeranie</li> <li>• Lyžovanie na svahu</li> <li>• ZZE – Ako padá gumená loptička? + videomeranie</li> <li>• ZZE – Ako padá vo vzduchu ľahké teleso? + videomeranie</li> </ul>

### Záver

Navrhnutá metodika implementácie matematického modelovania na počítači bola experimentálne overovaná v dvoch triedach 1.ročníka gymnázia a na seminári pre maturantov z fyziky. Cieľom pedagogického experimentu bude zistiť, do akej miery je navrhnutá metodika vhodná pre žiakov, do akej miery zvládli metódu dynamického modelovania na počítači a či to nejako ovplyvnilo ich konceptuálne pochopenie pojmov a zákonov z oblasti kinematiky a dynamiky. Výsledky pedagogického experimentu budú podrobené dôkladnej analýze, na základe ktorej bude upravená metodika spolu so všetkými výučbovými materiálmi (pracovné listy, metodické materiály pre učiteľa, počítačové súbory (aktivity aj vzorové výsledky)). Tie budú následne ponúknuté učiteľom k používaniu. Veríme, že si táto metóda nájde svojich fanúšikov a že na základe týchto aktivít, kde sa reálny experiment prepája s teóriou, žiaci získajú predstavu o tom ako funguje veda a ako pracujú vedci.

### PodĎakovanie

Príspevok vznikol v rámci projektu APVV-0715-12: Výskum efektívnosti metód inovácie výučby matematiky, fyziky a informatiky.

### Literatúra

HELD, Ľ. a kol. 2011. Výskumne ladená koncepcia prírodovedného vzdelávania (IBSE v slovenskom kontexte). SAV Bratislava : VEDA, 2011. 138 s. ISBN 978-80-8082-486-0.

FEKOVÁ, V., JEŠKOVÁ, Z., HORVÁTHOVÁ, M. 2013. Nový predmet na scéne - programovanie a interaktívne prostredia, In: Tvorivý učiteľ fyziky VI, Národný festival fyziky 2013. Košice : Equilibira, s.r.o., 2013. s. 83-89, ISBN 978-80-971450-0-2. Dostupné na internete: <<http://sfs.sav.sk/smolenice/prispevky.htm>>

JEŠKOVÁ, Z. a kol. 2010. Využitie informačných a komunikačných technológií v predmete fyzika pre stredné školy. Učebný materiál – modul 3. 1. vydanie. Košice: Elfa, 2010. 242s. ISBN 978-80-8086-146-9.

JEŠKOVÁ, Z., KIREŠ, M., ONDEROVÁ, Ľ. 2012. Školská reforma na Slovensku mení spôsob výučby prírodných vied. In: Československý časopis pro fyziku 5-6 (2012), s.316-321, ISSN 0009-0700.

TIMKOVÁ, V., JEŠKOVÁ, Z. 2014. Implementation of computer modeling in physics education, In: *Information and Communication Technology in Education*, 2014, p.245-253, ISBN 978-80-7464-561-7

TIMKOVÁ, V. 2014. Matematické modelovanie fyzikálnych javov s podporou počítača vo vyučovaní fyziky: rigorózna práca. Košice: UPJŠ. 2014. 56 s.

ŠPÚ, 2011a.Štátny vzdelávací program pre gymnázia v Slovenskej republike, ISCED 3A – Vyššie sekundárne vzdelávanie. Bratislava : Štátny pedagogický ústav. 2011. dostupné na internete <[http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/gymnazia/isced3\\_spu\\_uprava.pdf](http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/gymnazia/isced3_spu_uprava.pdf)>.

ŠPÚ, 2011b.Cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z fyziky. Bratislava : Štátny pedagogický ústav. 2011. dostupné na internete <[http://www.statpedu.sk/sites/default/files/dokumenty/cielove-poziadavky-na-maturitne-skusky/fyzika\\_cp.pdf](http://www.statpedu.sk/sites/default/files/dokumenty/cielove-poziadavky-na-maturitne-skusky/fyzika_cp.pdf)>.

### Adresa autorov

RNDr. Veronika Timková, doc. RNDr. Zuzana Ješková, PhD.

Oddelenie didaktiky fyziky, PF UPJŠ v Košiciach

Park Angelinum 9

041 54 Košice

veronika.timkova@student.upjs.sk, zuzana.jeskova@upjs.sk