# Zbierka riešených úloh z matematickej fyziky

Milan Žukovič

22. novembra 2009

# Obsah

**1 Komplexné čísla** **1**
1.1 Úvod . . . 1
1.2 Úlohy . . . 5
1.3 Nápovedy . . . 10
1.4 Riešenia . . . 12

**2 Funkcie komplexnej premennej** **35**
2.1 Úvod . . . 35
2.2 Úlohy . . . 38
2.3 Nápovedy . . . 42
2.4 Riešenia . . . 46

**3 Analytické funkcie** **67**
3.1 Úvod . . . 67
3.2 Úlohy . . . 69
3.3 Nápovedy . . . 74
3.4 Riešenia . . . 76

**4 Krivkový integrál** **99**
4.1 Úvod . . . 99
4.2 Úlohy . . . 101
4.3 Nápovedy . . . 104
4.4 Riešenia . . . 105

**5 Cauchyho integrálny vzorec** **113**
5.1 Úvod . . . . . 113
5.2 Úlohy . . . . . 114
5.3 Nápovedy . . . . . 118
5.4 Riešenia . . . . . 119

**6 Rady a konvergencia** **131**
6.1 Úvod . . . . . 131
6.1.1 Definície . . . . . 131
6.1.2 Špeciálne rady . . . . . 132
6.1.3 Kritéria konvergencie . . . . . 132
6.1.4 Rovnomerná konvergencia . . . . . 133
6.1.5 Kritéria rovnomernej konvergencie . . . . . 133
6.1.6 Rovnomerne konvergentný mocninový rad . . . . . 134
6.1.7 Taylorov rad . . . . . 135
6.1.8 Laurentov rad . . . . . 136
6.2 Úlohy . . . . . 137
6.3 Nápovedy . . . . . 145
6.4 Riešenia . . . . . 151

**7 Rezíduá** **187**
7.1 Úvod . . . . . 187
7.2 Úlohy . . . . . 190
7.3 Nápovedy . . . . . 194
7.4 Riešenia . . . . . 196

**A Vzorce pre derivovanie** **223**

**B Vzorce pre integrovanie** **227**

**C Súčty radov** **231**

**D Taylorove rady** **235**

# Kapitola 1

# Komplexné čísla

## 1.1 Úvod

**Algebraický tvar komplexného čísla.** Tvar $z = x + \imath y$ sa nazýva algebraický tvar, kde $(x, y \in \mathbb{R})$, $\Re(z) = x$ predstavuje *reálnu* a $\Im(z) = y$ *imaginárnu* časť $z$, a $\imath$ je *imaginárna jednotka*.

**Operácie.** Nech $z_1 = x_1 + \imath y_1$, $z_2 = x_2 + \imath y_2$, potom platí:

- Rovnosť:
$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2,$$
- Súčet a rozdiel:
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \imath(y_1 + y_2), \quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + \imath(y_1 - y_2)$$
- Súčin:
$$z_1 z_2 = (x_1 + \imath y_1)(x_2 + \imath y_2) = x_1x_2 + \imath x_1 y_2 + \imath y_1 x_2 + \imath^2 y_1 y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + \imath(x_1y_2 + y_1x_2)$$
- Podiel (za predpokladu $z_2 \neq 0$):
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \imath y_1}{x_2 + \imath y_2} = \frac{x_1 + \imath y_1}{x_2 + \imath y_2}\frac{x_2 - \imath y_2}{x_2 - \imath y_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - \imath\frac{x_1y_2 + y_1x_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

**Vlastnosti.** Nech $z, \zeta, \omega \in \mathbb{C}$ a nech $z = x + \imath y$, $\zeta = \xi + \imath\psi$. Platí:

- Uzavretosť vzhľadom na sčítanie a násobenie:

$$\begin{aligned} z + \zeta &= (x + \imath y) + (\xi + \imath\psi) \\ &= (x + \xi) + \imath\,(y + \psi) \in \mathbb{C}, \\ z\zeta &= (x + \imath y)\,(\xi + \imath\psi) \\ &= x\xi + \imath x\psi + \imath y\xi + \imath^2 y\psi \\ &= (x\xi - y\psi) + \imath\,(x\psi + \xi y) \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

- Komutitatívnosť vzhľadom na sčítanie a násobenie:

$$\begin{aligned} z + \zeta &= \zeta + z, \\ z\zeta &= \zeta z. \end{aligned}$$

- Asociatívny zákon vzhľadom na sčítanie a násobenie:

$$\begin{aligned} (z + \zeta) + \omega &= z + (\zeta + \omega)\,, \\ (z\zeta)\,\omega &= z\,(\zeta\omega)\,. \end{aligned}$$

- Distributívny zákon:

$$z\,(\zeta + \omega) = z\zeta + z\omega.$$

**Komplexne združené číslo.** Komplexné číslo $\overline{z} \equiv x - iy$ nazývame číslom komplexne združeným k $z$ a platí:

1. $\overline{(\overline{z})} = z$,
2. $\overline{z + \zeta} = \overline{z} + \overline{\zeta}$,
3. $\overline{z\zeta} = \overline{z}\,\overline{\zeta}$,
4. $\overline{\left(\dfrac{z}{\zeta}\right)} = \dfrac{(\overline{z})}{(\overline{\zeta})}$.

**Komplexná rovina.** Komplexné číslo $z = x + \imath y$ môžeme zobraziť ako dvojicu reálnych čísiel $(x, y)$, a teda ako bod v rovine $\mathbb{R}^2$, ktorú nazývame *komplexná rovina.* (Viď obr. 1.1.) Komplexné číslo v tvare $z = x + \imath y$ sa nazýva *kartézsky tvar.*

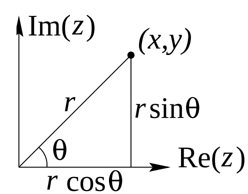
**Modul komplexného čísla.** *Veľkosť* alebo *modul* komplexného čísla je vzdialenosť bodu od počiatku. Je definovaný ako $|z| = |x + \imath y| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Platí že $z\overline{z} = (x + \imath y)(x - \imath y) = x^2 + y^2 = |z|^2$. Modul má nasledujúce vlastnosti.

1. $|z\zeta| = |z|\,|\zeta|$
2. $\left|\frac{z}{\zeta}\right| = \frac{|z|}{|\zeta|}$ pre $\zeta \neq 0$.
3. $|z + \zeta| \leq |z| + |\zeta|$
4. $|z + \zeta| \geq ||z| - |\zeta||$

**Argument komplexného čísla.** *Argument* komplexného čísla je uhol ktorý zviera vektor tvorený počiatkom a bodom $z = x + \imath y$ s kladnou osou $x$. Argument sa označuje $\arg(z)$ a dá sa určiť pre všetky nenulové čísla až na aditívny celočíselný násobok $2\pi$. *Hlavná hodnota* komplexného čísla je z intervalu $(-\pi, \pi]$ a označuje sa $\operatorname{Arg}(z)$. Platí:

$$\arg(z\zeta) = \arg(z) + \arg(\zeta)$$
$$\operatorname{Arg}(z\zeta) \neq \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(\zeta)$$
$$\arg\left(z^2\right) = \arg(z) + \arg(z) \neq 2\arg(z)$$

**Polárny tvar.** Komplexné číslo $z = x + \imath y$ sa dá s použitím trigonometrie napísať v *polárnom tvare* $z = r(\cos\theta + \imath\sin\theta)$, kde $r = |z|$ je modul a $\theta = \arctan(x, y)$ je argument $z$ (Viď obr. 1.1.)




Obr. 1.1: Polárny tvar.

**Dôležité vzťahy.**

- Eulerov vzorec:

$$e^{\imath\theta} = \cos\theta + \imath\sin\theta.$$

- Kosínus a sínus pomocou exponenciálnej funkcie:

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\imath\theta} + \mathrm{e}^{-\imath\theta}}{2}, \qquad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\imath\theta} - \mathrm{e}^{-\imath\theta}}{\imath 2}$$

- Konverzia medzi kartézskym a polárnym tvarom:

$$r\,\mathrm{e}^{\imath\theta} = r\cos\theta + \imath r\sin\theta,$$
$$x + \imath y = \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{e}^{\imath\arctan(x,y)}\,.$$

  Kartézsky tvar je vhodný pre sčítanie a polárny pre násobenie a delenie.

- DeMoivreova formula:

$$\cos(n\theta) + \imath\sin(n\theta) = (\cos\theta + \imath\sin\theta)^n$$

## 1.2 Úlohy

**Úloha 1.1**
Napíšte nasledujúce výrazy v algebraickom tvare:

(a) $(1+i2)^7$

(b) $\dfrac{1}{(\overline{z}\overline{z})}$

(c) $\dfrac{iz+\overline{z}}{(3+i)^9}$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 1.2**
Overte že:

(a) $\dfrac{1+i2}{3-i4}+\dfrac{2-i}{i5}=-\dfrac{2}{5}$

(b) $(1-i)^4=-4$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 1.3**
Napíšte nasledujúce výrazy v tvare $a+ib$:

(a) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{-10}$

(b) $(11+i4)^2$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 1.4**
Napíšte nasledujúce komplexné čísla v tvare $a+ib$:

(a) $\left(\dfrac{2+i}{i6-(1-i2)}\right)^2$

(b) $(1-i)^7$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 1.5**
Ak $z = x + iy$, napíšte nasledujúce v tvare $u(x,y) + iv(x,y)$:

(a) $\overline{\left(\dfrac{\overline{z}}{z}\right)}$

(b) $\dfrac{z+i2}{2-i\overline{z}}$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 1.6**
Nájdite a zobrazte všetky hodnoty komplexných čísiel a definujte hlavnú hodnotu.

(a) $(1+i)^{1/3}$

(b) $i^{1/4}$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 1.7**
Načrtnite oblasti komplexnej roviny:

(a) $|\Re(z)| + 2|\Im(z)| \leq 1$

(b) $1 \leq |z-i| \leq 2$

(c) $|z-i| \leq |z+i|$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 1.8**
Dokážte nasledujúce rovnosti:

(a) $\arg(z\zeta) = \arg(z) + \arg(\zeta)$

(b) $\mathrm{Arg}(z\zeta) \neq \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(\zeta)$

(c) $\arg\left(z^2\right) = \arg(z) + \arg(z) \neq 2\arg(z)$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 1.9**
Geometrickými a algebraickými argumentami ukážte že pre komplexné čísla $z$ a $\zeta$ platia nerovnosti:

$$||z| - |\zeta|| \leq |z + \zeta| \leq |z| + |\zeta|$$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 1.10**
Nájdite všetky hodnoty výrazov a znázornite ich graficky.

(a) $(-1)^{-3/4}$

(b) $8^{1/6}$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 1.11**
Nájdite všetky hodnoty výrazov a znázornite ich graficky.

(a) $(-1)^{-1/4}$

(b) $16^{1/8}$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 1.12**
Načrtnite oblasti alebo krivky dane vzťahmi:

(a) $1 < |z - i2| < 2$

(b) $|\Re(z)| + 5|\Im(z)| = 1$

(c) $|z - i| = |z + i|$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 1.13**
Načrtnite oblasti alebo krivky dane vzťahmi:

(a) $|z - 1 + i| \leq 1$

(b) $\Re(z) - \Im(z) = 5$

(c) $|z - i| + |z + i| = 1$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 1.14**
Riešte rovnicu

$$|\,\mathrm{e}^{i\theta} - 1| = 2$$

pre $\theta$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ a overte riešenie graficky.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 1.15**
Ukážte že Eulerova formula, $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, je formálne konzistentná so štandardným rozvojom do Taylorovho radu pre reálne funkcie $\mathrm{e}^x$, $\cos x$ a $\sin x$. Uvažujte rozvoj do Taylorovho radu funkcie $\mathrm{e}^x$ okolo $x = 0$ ako definíciu exponenciálnej funkcie pre komplexnú premennu.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 1.16**
S použitím de Moivreovho vzorca odvoďte trigonometrickú identitu

$$\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta).$$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 1.17**
Stanovte vzorec

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \qquad (z \neq 1),$$

pre súčet konečného geometrického radu; potom odvodte vzorce

(a) $1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sin((n + 1/2))}{2\sin(\theta/2)}$

(b) $\sin(\theta) + \sin(2\theta) + \cdots + \sin(n\theta) = \frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2} - \frac{\cos((n+1/2))}{2\sin(\theta/2)}$

kde $0 < \theta < 2\pi$.

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 1.18**

Dokážte $|z\zeta| = |z||\zeta|$ a $\left|\frac{z}{\zeta}\right| = \frac{|z|}{|\zeta|}$ s použitím polárneho tvaru.

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 1.19**

Dokážte že

$$|z+\zeta|^2 + |z-\zeta|^2 = 2\left(|z|^2 + |\zeta|^2\right).$$

Interpretujte to geometricky.

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 1.20**

Napíšte $(1+i)^{10}$ v kartézskom tvare pomocou nasledovných dvoch metód:

(a) Použite jednoduché násobenie. Počet násobení by nemal presiahnuť 4.

(b) Použite násobenie v polárnom tvare.

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 1.21**

Ukážte že každé z čísel $z = -a + \left(a^2 - b\right)^{1/2}$ spĺňa rovnicu $z^2 + 2az + b = 0$.

Nápoveda, Riešenie

## 1.3 Nápovedy

**Nápoveda 1.1**

**Nápoveda 1.2**

**Nápoveda 1.3**

**Nápoveda 1.4**

**Nápoveda 1.5**

**Nápoveda 1.6**

**Nápoveda 1.7**

**Nápoveda 1.8**

**Nápoveda 1.9**
Napíšte mnohohodnotovosť explicitne.

**Nápoveda 1.10**
Uvažujte trojuholník s vrcholmi v $0$, $z$ a $z+\zeta$.

**Nápoveda 1.11**

**Nápoveda 1.12**

**Nápoveda 1.13**

**Nápoveda 1.14**

**Nápoveda 1.15**

**Nápoveda 1.16**
Nájdite Taylorove rady $\mathrm{e}^{i\theta}$, $\cos\theta$ a $\sin\theta$. Všimnite si že $i^{2n} = (-1)^n$.

**Nápoveda 1.17**

**Nápoveda 1.18**

**Nápoveda 1.19**
$|\,\mathrm{e}^{i\theta}\,| = 1$.

**Nápoveda 1.20**
Uvažujte paralelogram definovaný pomocou $z$ a $\zeta$.

**Nápoveda 1.21**

$$(1+i)^{10} = \left(\left((1+i)^2\right)^2\right)^2 (1+i)^2.$$

**Nápoveda 1.22**
Dosaďte čísla do rovnice.

## 1.4 Riešenia

**Riešenie 1.1**
(a) Umocňovanie môžeme previesť priamym násobením.

$$\begin{aligned}(1+i2)^7 &= (1+i2)(1+i2)^2(1+i2)^4\\ &= (1+i2)(-3+i4)(-3+i4)^2\\ &= (11-i2)(-7-i24)\\ &= 29+i278\end{aligned}$$

Problém môžeme tiež riešiť pomocou De Moivreovej teorémy.

$$\begin{aligned}(1+i2)^7 &= \left(\sqrt{5}\,\mathrm{e}^{i\arctan(1,2)}\right)^7\\ &= 125\sqrt{5}\,\mathrm{e}^{i7\arctan(1,2)}\\ &= 125\sqrt{5}\cos(7\arctan(1,2)) + i125\sqrt{5}\sin(7\arctan(1,2))\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\overline{z}\overline{z})} &= \frac{1}{(x-iy)^2}\\ &= \frac{1}{(x-iy)^2}\frac{(x+iy)^2}{(x+iy)^2}\\ &= \frac{(x+iy)^2}{(x^2+y^2)^2}\\ &= \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + i\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

(c) Výraz môžeme vyhodnotiť pomocou De Moivreovej teorémy.

$$
\begin{aligned}
\frac{iz+\overline{z}}{(3+i)^9} &= (-y+ix+x-iy)(3+i)^{-9}\\
&= (1+i)(x-y)\left(\sqrt{10}\,\mathrm{e}^{i\arctan(3,1)}\right)^{-9}\\
&= (1+i)(x-y)\frac{1}{10000\sqrt{10}}\,\mathrm{e}^{-i9\arctan(3,1)}\\
&= \frac{(1+i)(x-y)}{10000\sqrt{10}}\left(\cos(9\arctan(3,1)) - i\sin(9\arctan(3,1))\right)\\
&= \frac{(x-y)}{10000\sqrt{10}}\left(\cos(9\arctan(3,1)) + \sin(9\arctan(3,1))\right)\\
&\qquad + i\frac{(x-y)}{10000\sqrt{10}}\left(\cos(9\arctan(3,1)) - \sin(9\arctan(3,1))\right)
\end{aligned}
$$

Problém sa tiež dá riešiť priamym násobením, aj keď je to trochu nepraktické.

$$
\begin{aligned}
\frac{iz+\overline{z}}{(3+i)^9} &= \frac{(-y+ix+x-iy)(3-i)^9}{10^9}\\
&= \frac{(1+i)(x-y)(3-i)\left(\left((3-i)^2\right)^2\right)^2}{10^9}\\
&= \frac{(1+i)(x-y)(3-i)\left((8-i6)^2\right)^2}{10^9}\\
&= \frac{(1+i)(x-y)(3-i)(28-i96)^2}{10^9}\\
&= \frac{(1+i)(x-y)(3-i)(-8432-i5376)}{10^9}\\
&= \frac{(x-y)(-22976-i38368)}{10^9}\\
&= \frac{359(y-x)}{15625000} + i\frac{1199(y-x)}{31250000}
\end{aligned}
$$

**Riešenie 1.2**
(a)

$$\begin{aligned}\frac{1+i2}{3-i4}+\frac{2-i}{i5} &= \frac{1+i2}{3-i4}\frac{3+i4}{3+i4}+\frac{2-i}{i5}\frac{-i}{-i}\\ &= \frac{-5+i10}{25}+\frac{-1-i2}{5}\\ &= -\frac{2}{5}\end{aligned}$$

(b)

$$(1-i)^4 = (-i2)^2 = -4$$

**Riešenie 1.3**
(a) Najprv prevedieme násobenie v kartézskom tvare.

$$\begin{aligned}\left(1+i\sqrt{3}\right)^{-10} &= \left(\left(1+i\sqrt{3}\right)^2\left(1+i\sqrt{3}\right)^8\right)^{-1}\\ &= \left(\left(-2+i2\sqrt{3}\right)\left(-2+i2\sqrt{3}\right)^4\right)^{-1}\\ &= \left(\left(-2+i2\sqrt{3}\right)\left(-8-i8\sqrt{3}\right)^2\right)^{-1}\\ &= \left(\left(-2+i2\sqrt{3}\right)\left(-128+i128\sqrt{3}\right)\right)^{-1}\\ &= \left(-512-i512\sqrt{3}\right)^{-1}\\ &= \frac{1}{512}\frac{-1}{1+i\sqrt{3}}\\ &= \frac{1}{512}\frac{-1}{1+i\sqrt{3}}\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\\ &= -\frac{1}{2048}+i\frac{\sqrt{3}}{2048}\end{aligned}$$

Teraz prevedieme násobenie v polárnom tvare.

$$\begin{aligned}
\left(1+i\sqrt{3}\right)^{-10} &= \left(2\,\mathrm{e}^{i\pi/3}\right)^{-10} \\
&= 2^{-10}\,\mathrm{e}^{-i10\pi/3} \\
&= \frac{1}{1024}\left(\cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{10\pi}{3}\right)\right) \\
&= \frac{1}{1024}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) \\
&= \frac{1}{1024}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{2048} + i\frac{\sqrt{3}}{2048}
\end{aligned}$$

(b)

$$(11+i4)^2 = 105 + i88$$

**Riešenie 1.4**

(a)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2+i}{i6-(1-i2)}\right)^2 &= \left(\frac{2+i}{-1+i8}\right)^2 \\
&= \frac{3+i4}{-63-i16} \\
&= \frac{3+i4}{-63-i16}\,\frac{-63+i16}{-63+i16} \\
&= -\frac{253}{4225} - i\frac{204}{4225}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
(1-i)^7 &= \left((1-i)^2\right)^2(1-i)^2(1-i) \\
&= (-i2)^2(-i2)(1-i) \\
&= (-4)(-2-i2) \\
&= 8+i8
\end{aligned}$$

**Riešenie 1.5**
(a)

$$
\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)} &= \overline{\left(\frac{\overline{x+iy}}{x+iy}\right)} \\
&= \overline{\left(\frac{x-iy}{x+iy}\right)} \\
&= \frac{x+iy}{x-iy} \\
&= \frac{x+iy}{x-iy}\,\frac{x+iy}{x+iy} \\
&= \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + i\,\frac{2xy}{x^2+y^2}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\frac{z+i2}{2-i\overline{z}} &= \frac{x+iy+i2}{2-i(x-iy)} \\
&= \frac{x+i(y+2)}{2-y-ix} \\
&= \frac{x+i(y+2)}{2-y-ix}\,\frac{2-y+ix}{2-y+ix} \\
&= \frac{x(2-y)-(y+2)x}{(2-y)^2+x^2} + i\,\frac{x^2+(y+2)(2-y)}{(2-y)^2+x^2} \\
&= \frac{-2xy}{(2-y)^2+x^2} + i\,\frac{4+x^2-y^2}{(2-y)^2+x^2}
\end{aligned}
$$

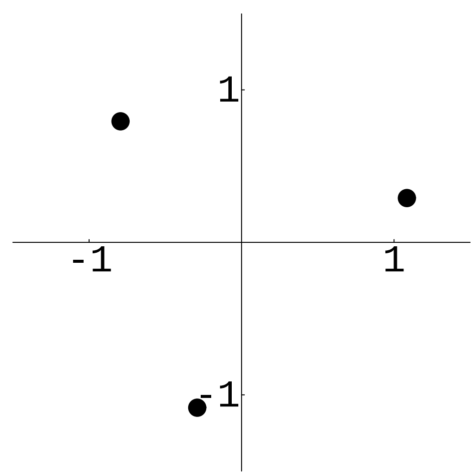
**Riešenie 1.6**
(a)

$$
\begin{aligned}
(1+i)^{1/3} &= \left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}\right)^{1/3} \\
&= \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/12}\,1^{1/3} \\
&= \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/12}\,\mathrm{e}^{i2\pi k/3}, \quad k=0,1,2 \\
&= \left\{\sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/12}, \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{i3\pi/4}, \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{i17\pi/12}\right\}
\end{aligned}
$$

Hlavná hodnota koreňa je

$$\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/12}\,.$$

Korene sú znázornené na obr. 1.2.




Obr. 1.2: $(1+i)^{1/3}$

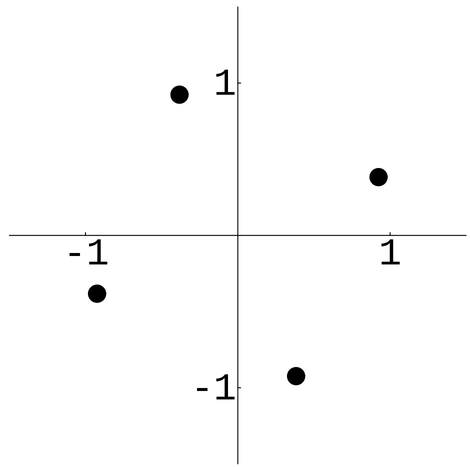
(b)

$$\begin{aligned} i^{1/4} &= \left(e^{i\pi/2}\right)^{1/4} \\ &= e^{i\pi/8}\, 1^{1/4} \\ &= e^{i\pi/8}\, e^{i2\pi k/4}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \\ &= \left\{ e^{i\pi/8}, e^{i5\pi/8}, e^{i9\pi/8}, e^{i13\pi/8} \right\} \end{aligned}$$

Hlavná hodnota koreňa je

$$\sqrt[4]{i} = e^{i\pi/8}\,.$$

Korene sú znázornené na obr. 1.3.

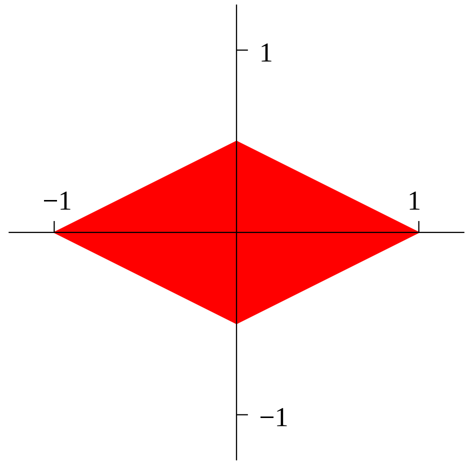



Obr. 1.3: $i^{1/4}$

**Riešenie 1.7**
(a)

$$\begin{gathered} |\Re(z)| + 2|\Im(z)| \le 1 \\ |x| + 2|y| \le 1 \end{gathered}$$

V prvom kvadrante to je trojuholník pod priamkou $y = (1-x)/2$. Symetrickým zobrazením tohto trojuholníka vzhľadom na súradnicové osi dostaneme trojuholníky aj v ostatných kvadrantoch. Konkrétne, dostaneme množinu bodov: $\{z = x + iy \mid -1 \leq x \leq 1 \wedge |y| \leq (1-|x|)/2\}$. Viď obr. 1.4.




Obr. 1.4: $|\Re(z)| + 2|\Im(z)| \leq 1$

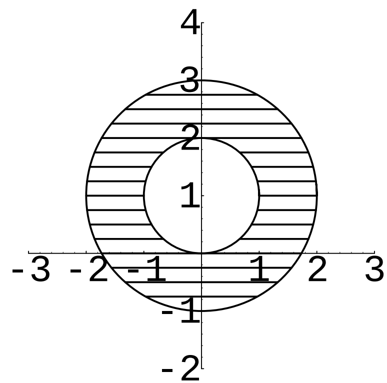
(b) $|z - i|$ predstavuje vzdialenosť od bodu $i$ v komplexnej rovine. Teda $1 < |z - i| < 2$ predstavuje medzikružie so stredom v bode $z = i$ medzi polomermi $1$ a $2$. Viď obr. 1.5.

(c) Body ktoré sú bližšie k $z = i$ než $z = -i$ sú tie v hornej polrovine. Viď obr. 1.6.

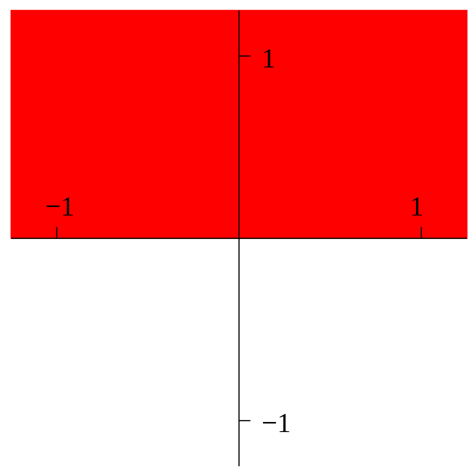
**Riešenie 1.8**
Nech $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ a $\zeta = \rho\,\mathrm{e}^{i\phi}$.

(a)

$$\arg(z\zeta) = \arg(z) + \arg(\zeta)$$
$$\arg\left(r\rho\,\mathrm{e}^{i(\theta+\phi)}\right) = \{\theta + 2\pi m\} + \{\phi + 2\pi n\}$$
$$\{\theta + \phi + 2\pi k\} = \{\theta + \phi + 2\pi m\}$$




Obr. 1.5: $1 < |z - i| < 2$




Obr. 1.6: Horná polrovina.

(b)

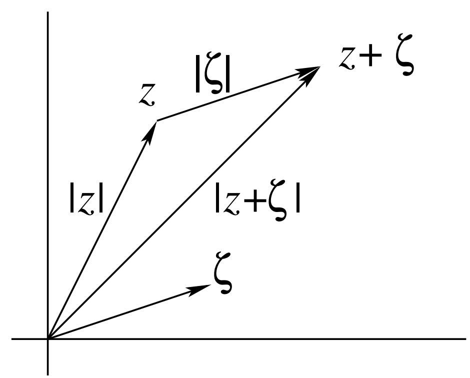
$$\mathrm{Arg}(z\zeta) \neq \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(\zeta)$$

Uvažujme $z = \zeta = -1$. $\mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}(\zeta) = \pi$, avšak $\mathrm{Arg}(z\zeta) = \mathrm{Arg}(1) = 0$. Potom dostávame $0 \neq 2\pi$.

(c)

$$\arg\left(z^2\right) = \arg(z) + \arg(z) \neq 2\arg(z)$$
$$\arg\left(r^2\,\mathrm{e}^{i2\theta}\right) = \{\theta + 2\pi k\} + \{\theta + 2\pi m\} \neq 2\{\theta + 2\pi n\}$$
$$\{2\theta + 2\pi k\} = \{2\theta + 2\pi m\} \neq \{2\theta + 4\pi n\}$$

**Riešenie 1.9**
Uvažujme trojuholník v komplexnej rovine s vrcholmi v $0$, $z$ a $z + \zeta$. (Viď obr. 1.7.)




Obr. 1.7: Trojuholníkova nerovnosť.

Dĺžky strán trojuholníka sú $|z|$, $|\zeta|$ a $|z + \zeta|$. Druhá nerovnosť poukazuje na to že jedna strana v trojuholníku musí byť menšia alebo rovná súčtu dĺžok ostatných dvoch strán.

$$|z + \zeta| \leq |z| + |\zeta|$$

Prvá nerovnosť poukazuje na to že jedna strana v trojuholníku musí byť väčšia alebo rovná rozdielu dĺžok ostatných dvoch strán.

$$|z + \zeta| \geq ||z| - |\zeta||$$

Teraz dokážeme nerovnosti algebraicky. Nerovnosť zredukujeme na rovnosť. Nech $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, $\zeta = \rho\,\mathrm{e}^{i\phi}$.

$$\begin{gathered}
||z| - |\zeta|| \leq |z + \zeta| \leq |z| + |\zeta| \\
|r - \rho| \leq |r\,\mathrm{e}^{i\theta} + \rho\,\mathrm{e}^{i\phi}| \leq r + \rho \\
(r - \rho)^2 \leq \left(r\,\mathrm{e}^{i\theta} + \rho\,\mathrm{e}^{i\phi}\right)\left(r\,\mathrm{e}^{-i\theta} + \rho\,\mathrm{e}^{-i\phi}\right) \leq (r + \rho)^2 \\
r^2 + \rho^2 - 2r\rho \leq r^2 + \rho^2 + r\rho\,\mathrm{e}^{i(\theta-\phi)} + r\rho\,\mathrm{e}^{i(-\theta+\phi)} \leq r^2 + \rho^2 + 2r\rho \\
-2r\rho \leq 2r\rho\cos(\theta - \phi) \leq 2r\rho \\
-1 \leq \cos(\theta - \phi) \leq 1
\end{gathered}$$

**Riešenie 1.10**

(a)

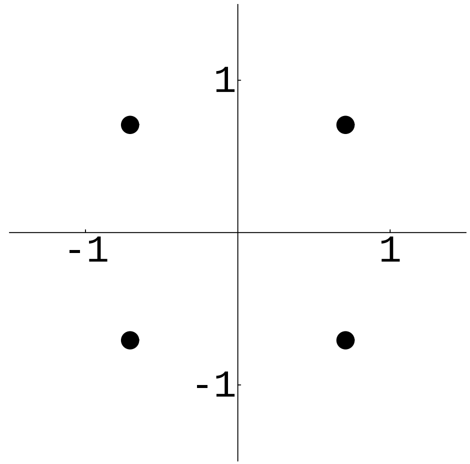
$$\begin{aligned}
(-1)^{-3/4} &= \left((-1)^{-3}\right)^{1/4} \\
&= (-1)^{1/4} \\
&= \left(\mathrm{e}^{i\pi}\right)^{1/4} \\
&= \mathrm{e}^{i\pi/4}\,1^{1/4} \\
&= \mathrm{e}^{i\pi/4}\,\mathrm{e}^{ik\pi/2}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \\
&= \left\{\mathrm{e}^{i\pi/4}, \mathrm{e}^{i3\pi/4}, \mathrm{e}^{i5\pi/4}, \mathrm{e}^{i7\pi/4}\right\} \\
&= \left\{\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right\}
\end{aligned}$$

Viď obr. 1.8.

(b)

$$\begin{aligned}
8^{1/6} &= \sqrt[6]{8}1^{1/6} \\
&= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{ik\pi/3}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\
&= \left\{\sqrt{2}, \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/3}, \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i2\pi/3}, \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi}, \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i4\pi/3}, \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i5\pi/3}\right\} \\
&= \left\{\sqrt{2}, \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right\}
\end{aligned}$$

Viď obr. 1.9.

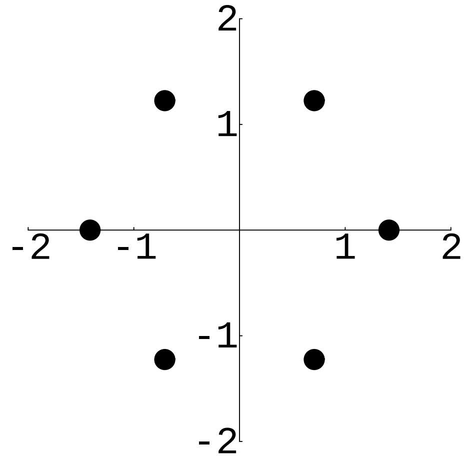



Obr. 1.8: $(-1)^{-3/4}$

**Riešenie 1.11**
(a)

$$
\begin{aligned}
(-1)^{-1/4} &= ((-1)^{-1})^{1/4} \\
&= (-1)^{1/4} \\
&= \left(\mathrm{e}^{i\pi}\right)^{1/4} \\
&= \mathrm{e}^{i\pi/4}\, 1^{1/4} \\
&= \mathrm{e}^{i\pi/4}\, \mathrm{e}^{ik\pi/2}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \\
&= \left\{\mathrm{e}^{i\pi/4}, \mathrm{e}^{i3\pi/4}, \mathrm{e}^{i5\pi/4}, \mathrm{e}^{i7\pi/4}\right\} \\
&= \left\{\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right\}
\end{aligned}
$$

Viď obr. 1.10.




Obr. 1.9: $8^{1/6}$

(b)

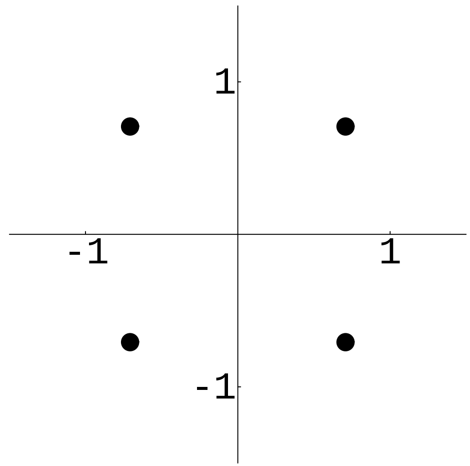
$$\begin{aligned}
16^{1/8} &= \sqrt[8]{16} 1^{1/8} \\
&= \sqrt{2}\, \mathrm{e}^{ik\pi/4}, \quad k = 0,1,2,3,4,5,6,7 \\
&= \left\{\sqrt{2}, \sqrt{2}\, \mathrm{e}^{i\pi/4}, \sqrt{2}\, \mathrm{e}^{i\pi/2}, \sqrt{2}\, \mathrm{e}^{i3\pi/4}, \sqrt{2}\, \mathrm{e}^{i\pi}, \sqrt{2}\, \mathrm{e}^{i5\pi/4}, \sqrt{2}\, \mathrm{e}^{i3\pi/2}, \sqrt{2}\, \mathrm{e}^{i7\pi/4}\right\} \\
&= \left\{\sqrt{2}, 1+i, i\sqrt{2}, -1+i, -\sqrt{2}, -1-i, -i\sqrt{2}, 1-i\right\}
\end{aligned}$$

Viď obr. 1.11.

**Riešenie 1.12**
(a) $|z - i2|$ predstavuje vzdialenosť od bodu $i2$ v komplexnej rovine. Teda $1 < |z - i2| < 2$ predstavuje medzikružie. Viď obr. 1.12.

(b)

$$|\Re(z)| + 5|\Im(z)| = 1$$
$$|x| + 5|y| = 1$$




Obr. 1.10: $(-1)^{-1/4}$

V prvom kvadrante je to priamka $y = (1-x)/5$. Symetrickým zobrazením daného segmentu priamky vzhľadom na súradnícove osi dostaneme segmenty v ostatných kvadrantoch. Konkrétne dostávame množinu bodov: $\{z = x + iy \mid -1 < x < 1 \wedge y = \pm(1-|x|)/5\}$. Viď obr. 1.13.

(c) Množina bodov s rovnakou vzdialenosťou od $i$ a $-i$ je reálna os. Viď obr. 1.14.

**Riešenie 1.13**

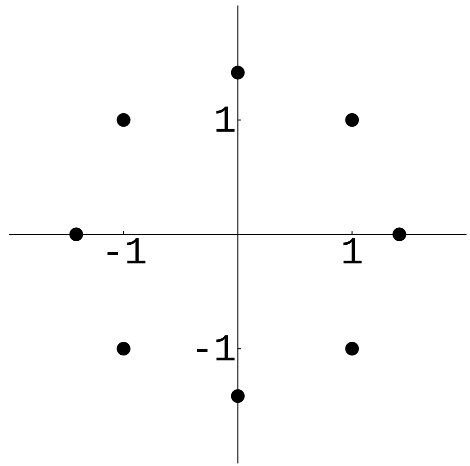
(a) $|z-1+i|$ predstavuje vzdialenosť od bodu $(1-i)$. Teda $|z-1+i| \leq 1$ predstavuje disk jednotkového polomeru so stredom v $(1-i)$. Viď obr. 1.15.

(b)

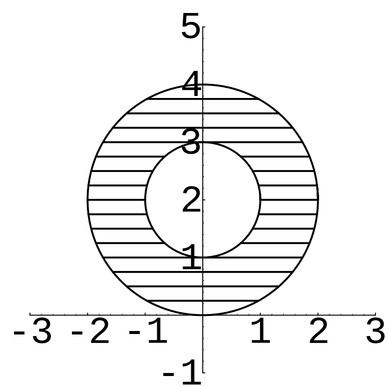
$$\Re(z) - \Im(z) = 5$$
$$x - y = 5$$
$$y = x - 5$$

Viď obr. 1.16.

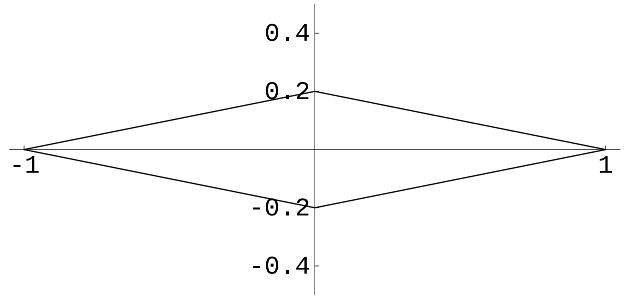
(c) Keďže $|z-i| + |z+i| \geq 2$, neexistuje riešenie rovnice $|z-i| + |z+i| = 1$.



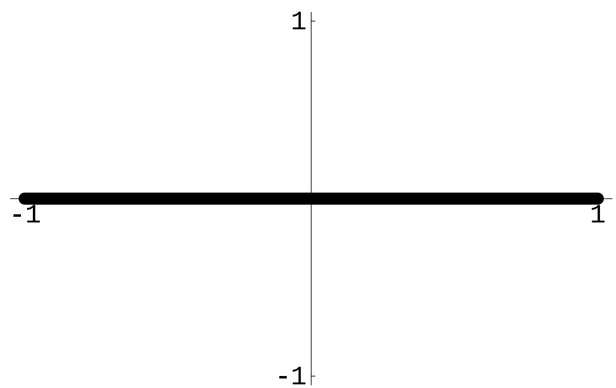

Obr. 1.11: $16^{-1/8}$



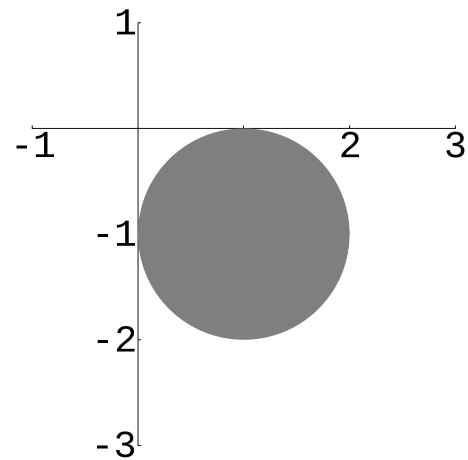

Obr. 1.12: $1 < |z - i2| < 2$



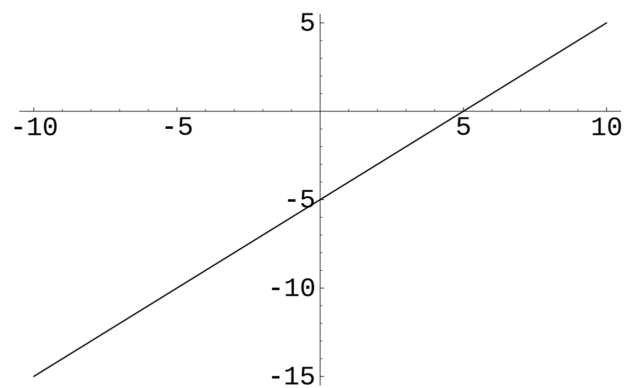

Obr. 1.13: $|\Re(z)| + 5|\Im(z)| = 1$




Obr. 1.14: $|z - i| = |z + i|$




Obr. 1.15: $|z-1+i|<1$




Obr. 1.16: $\Re(z)-\Im(z)=5$

**Riešenie 1.14**

$$\begin{aligned}
|\,\mathrm{e}^{i\theta} - 1| &= 2 \\
\left(\mathrm{e}^{i\theta} - 1\right)\left(\mathrm{e}^{-i\theta} - 1\right) &= 4 \\
1 - \mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta} + 1 &= 4 \\
-2\cos(\theta) &= 2 \\
\theta &= \pi
\end{aligned}$$

$\left\{\mathrm{e}^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\right\}$ je jednotková polkružnica v hornej polrovine komplexnej roviny od $1$ po $-1$. Jediný bod na tejto polkružnici so vzdialenosťou $2$ od bodu $1$ je bod $-1$, čo odpovedá uhlu $\theta = \pi$.

**Riešenie 1.15**

Pripomeňme si Taylorov rozvoj $\mathrm{e}^x$ v $x = 0$.

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Vezmime to ako definíciu exponenciálnej funkcie pre komplexnú premennu.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}\theta^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n} + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}
\end{aligned}$$

Porovnajme tento výraz s Taylorovým rozvojom funkcií sínus a kosínus.

$$\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n}, \qquad \sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1},$$

Teda $\mathrm{e}^{i\theta}$ a $\cos\theta + i\sin\theta$ majú rovnaký Taylorov rozvoj v $\theta = 0$.

$$\boxed{\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

**Riešenie 1.16**

$$\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^3$$
$$\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = \cos^3\theta + i3\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$$

Dáme do rovnosti reálne časti rovnice.

$$\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$

**Riešenie 1.17**
Definujme čiastočný súčet,

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k.$$

Teraz uvažujme $(1-z)S_n(z)$.

$$(1-z)S_n(z) = (1-z)\sum_{k=0}^{n} z^k$$
$$(1-z)S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k - \sum_{k=1}^{n+1} z^k$$
$$(1-z)S_n(z) = 1 - z^{n+1}$$

Predelíme $1-z$. Poznamenajme že $1-z$ je rôzne od nuly.

$$S_n(z) = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$
$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, \qquad (z \neq 1)$$

Teraz uvažujme $z = \mathrm{e}^{i\theta}$, kde $0 < \theta < 2\pi$ takže $z$ nie je jednotkové.

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^k = \frac{1-\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^{n+1}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}}$$
$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} = \frac{1-\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}}$$

Aby sme dostali $\sin(\theta/2)$ do menovateľa, vynásobme vrch aj spodok výrazom $\mathrm{e}^{-i\theta/2}$.

$$\sum_{k=0}^{n}(\cos(k\theta)+i\sin(k\theta)) = \frac{\mathrm{e}^{-i\theta/2}-\mathrm{e}^{i(n+1/2)\theta}}{\mathrm{e}^{-i\theta/2}-\mathrm{e}^{i\theta/2}}$$
$$\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)+i\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta) = \frac{\cos(\theta/2)-i\sin(\theta/2)-\cos((n+1/2)\theta)-i\sin((n+1/2)\theta)}{-2i\sin(\theta/2)}$$
$$\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)+i\sum_{k=1}^{n}\sin(k\theta) = \frac{1}{2}+\frac{\sin((n+1/2)\theta)}{\sin(\theta/2)}+i\left(\frac{1}{2}\cot(\theta/2)-\frac{\cos((n+1/2)\theta)}{\sin(\theta/2)}\right)$$

(a) Zoberieme reálnu a imaginárnu časť a dostaneme identity.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta) = \frac{1}{2}+\frac{\sin((n+1/2)\theta)}{2\sin(\theta/2)}}$$

(b)

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\sin(k\theta) = \frac{1}{2}\cot(\theta/2)-\frac{\cos((n+1/2)\theta)}{2\sin(\theta/2)}}$$

**Riešenie 1.18**

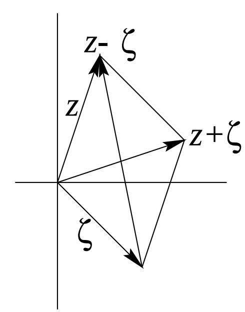
$$\begin{aligned}|z\zeta| &= |r\,\mathrm{e}^{i\theta}\,\rho\,\mathrm{e}^{i\phi}\,|\\ &= |r\rho\,\mathrm{e}^{i(\theta+\phi)}\,|\\ &= |r\rho|\\ &= |r||\rho|\\ &= |z||\zeta|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{z}{\zeta}\right| &= \left|\frac{r\,\mathrm{e}^{i\theta}}{\rho\,\mathrm{e}^{i\phi}}\right| \\
&= \left|\frac{r}{\rho}\,\mathrm{e}^{i(\theta-\phi)}\right| \\
&= \left|\frac{r}{\rho}\right| \\
&= \frac{|r|}{|\rho|} \\
&= \frac{|z|}{|\zeta|}
\end{aligned}
$$

**Riešenie 1.19**

$$
\begin{aligned}
|z+\zeta|^2 + |z-\zeta|^2 &= (z+\zeta)\left(\overline{z}+\overline{\zeta}\right) + (z-\zeta)\left(\overline{z}-\overline{\zeta}\right) \\
&= z\overline{z} + z\overline{\zeta} + \zeta\overline{z} + \zeta\overline{\zeta} + z\overline{z} - z\overline{\zeta} - \zeta\overline{z} + \zeta\overline{\zeta} \\
&= 2\left(|z|^2 + |\zeta|^2\right)
\end{aligned}
$$

Uvažujme paralelogram definovaný vektormi $z$ a $\zeta$. Dĺžky strán sú $z$ a $\zeta$ a dĺžky diagonál sú $z+\zeta$ a $z-\zeta$. Z geometrie vieme že súčet štvorcov diagonál v paralelograme je rovný súčtu štvorcov štyroch strán. (Viď obr. 1.17.)




Obr. 1.17: Paralelogram definovaný $z$ a $\zeta$.

**Riešenie 1.20**
(a)

$$
\begin{aligned}
(1+i)^{10} &= \left(\left((1+i)^2\right)^2\right)^2 (1+i)^2 \\
&= \left((i2)^2\right)^2 (i2) \\
&= (-4)^2\,(i2) \\
&= 16(i2) \\
&= i32
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
(1+i)^{10} &= \left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}\right)^{10} \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^{10} \mathrm{e}^{i10\pi/4} \\
&= 32\,\mathrm{e}^{i\pi/2} \\
&= i32
\end{aligned}
$$

**Riešenie 1.21**
Dosaďme čísla do rovnice a dostaneme identitu.

$$
\begin{gathered}
z^2 + 2az + b = 0 \\
\left(-a + \left(a^2 - b\right)^{1/2}\right)^2 + 2a\left(-a + \left(a^2 - b\right)^{1/2}\right) + b = 0 \\
a^2 - 2a\left(a^2 - b\right)^{1/2} + a^2 - b - 2a^2 + 2a\left(a^2 - b\right)^{1/2} + b = 0 \\
0 = 0
\end{gathered}
$$

# Kapitola 2

# Funkcie komplexnej premennej

## 2.1 Úvod

**Kartézsky a polárny tvar.** Funkciu komplexnej premennej $z$ môžeme napísať ako funkciu $x$ a $y$ alebo ako funkciu $r$ a $\theta$ substitúciou $z = x + \imath y$, respektíve $z = r\,\mathrm{e}^{\imath\theta}$. Potom môžeme oddeliť reálnu a imaginárnu časť:

$$f(z) = u(x, y) + \imath v(x, y), \quad \text{alebo} \quad f(z) = u(r, \theta) + \imath v(r, \theta),$$
$$f(z) = \rho(x, y)\,\mathrm{e}^{\imath\phi(x,y)}, \quad \text{alebo} \quad f(z) = \rho(r, \theta)\,\mathrm{e}^{\imath\phi(r,\theta)}\,.$$

**Trigonometrické funkcie.**

$$
\begin{gathered}
\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \imath \sin y) \\
\cos z = \frac{\mathrm{e}^{\imath z} + \mathrm{e}^{-\imath z}}{2} \qquad \sin z = \frac{\mathrm{e}^{\imath z} - \mathrm{e}^{-\imath z}}{\imath 2} \\
\cos z = \cos x \cosh y - \imath \sin x \sinh y \qquad \sin z = \sin x \cosh y + \imath \cos x \sinh y \\
\cosh z = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2} \qquad \sinh z = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2} \\
\cosh z = \cosh x \cos y + \imath \sinh x \sin y \qquad \sinh z = \sinh x \cos y + \imath \cosh x \sin y \\
\sin(\imath z) = \imath \sinh z \qquad \sinh(\imath z) = \imath \sin z \\
\cos(\imath z) = \cosh z \qquad \cosh(\imath z) = \cos z \\
\log z = \ln|z| + \imath \arg(z) = \ln|z| + \imath \operatorname{Arg}(z) + \imath 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}
\end{gathered}
$$

**Inverzné trigonometrické funkcie.** Logaritmická funkcia, $\log(z)$, je definovaná ako funkcia inverzná k exponenciálnej funkcií $\mathrm{e}^z$. Platí:

$$
\boxed{\log z = \ln|z| + \imath \arg(z) = \ln|z| + \imath(\operatorname{Arg}(z) + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}}
$$

kde druhá rovnosť vyjadruje mnohoznačnosť argumentu funkcie s $\operatorname{Arg}(z)$ predstavujúcu hlavnú hodnotu argumentu. Hlavná hodnota logaritmu je

$$
\operatorname{Log} z = \ln|z| + \imath \operatorname{Arg}(z).
$$

**Logaritmické rovnosti.**

$$
\begin{aligned}
& a^b = \mathrm{e}^{b \log a} \\
& \mathrm{e}^{\log z} = \mathrm{e}^{\operatorname{Log} z} = z \\
& \log(ab) = \log a + \log b \\
& \log(1/a) = -\log a \\
& \log(a/b) = \log a - \log b \\
& \log\left(z^{1/n}\right) = \frac{1}{n} \log z, \quad n \in \mathbb{Z}^{\pm}
\end{aligned}
$$

**Logaritmické nerovnosti.**

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Log}(uv) \neq \operatorname{Log}(u) + \operatorname{Log}(v) \\
&\log z^a \neq a \log z \\
&\operatorname{Log} z^a \neq a \operatorname{Log} z \\
&\log \mathrm{e}^z \neq z
\end{aligned}$$

**Body vetvenia funkcie.** Bod $z_0$ je bodom vetvenia funkcie $f(z)$ ak funkcia mení hodnotu pri obiehaní okolo bodu po akejkoľvek krivke ktorá okrem bodu $z = z_0$ neobsahuje žiadne ďalšie singulatity.

Platí:

- Nech $f(z)$ je jednoznačná funkcia. Potom $\log(f(z))$ a $(f(z))^\alpha$ móžu mať body vetvenia len tam kde $f(z)$ je nulová alebo singulárna.
- Uvažujme jednoznačnú funkciu $f(z)$ ktorá je v bode $z = z_0$ buď nulová alebo singulárna. Nech $f(z) = g(z)h(z)$ kde $h(z)$ je nenulová a konečná. $(f(z))^\alpha$ má bod vetvenia v $z = z_0$ práve vtedy ak $(g(z))^\alpha$ tam má bod vetvenia. $\log(f(z))$ má bod vetvenia v $z = z_0$ práve vtedy ak $\log(g(z))$ tam má bod vetvenia.

## 2.2 Úlohy

**Úloha 2.1**
Nájdite obraz časti roviny danej $2 < x < 3$ v zobrazení $w = f(z) = z^2$.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 2.2**
Pre dané reálne číslo $\phi$, $0 \le \phi < 2\pi$, nájdite obraz sektora $0 \le \arg(z) < \phi$ v transformácií $w = z^4$. Aké veľké musí byť $\phi$ aby $w$ rovina bola pokrytá práve raz?
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 2.3**
Nech v kartézskych súradniciach, $z = x + \imath y$. Vyjadrite $\sin(z)$ v kartézskom a polárnom tvare.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 2.4**
Ukážte že $\mathrm{e}^z$ je nenulové pre všetky konečné $z$.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 2.5**
Ukážte že

$$\left|\mathrm{e}^{z^2}\right| \le \mathrm{e}^{|z|^2}.$$

Kedy platí rovnosť?
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 2.6**
Riešte $\coth(z) = 1$.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 2.7**
Riešte $2 \in 2^z$. To znamená, pre aké hodnoty $z$ je $2$ jedna z hodnôt $2^z$? Odvoďte výsledok a overte ho vyčíslením $2^z$ pre nájdené riešenia.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 2.8**
Riešte $1 \in 1^z$. To znamená, pre aké hodnoty $z$ je $1$ jedna z hodnôt $1^z$? Odvoďte výsledok a overte ho vyčíslením $1^z$ pre nájdené riešenia.

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 2.9**
Ukážte že ak $\Re(z_1) > 0$ a $\Re(z_2) > 0$ potom

$$\mathrm{Log}(z_1 z_2) = \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2)$$

a ilustrujte že tento vzťah neplatí vo všeobecnosti.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 2.10**
Nájdite spor v nasledujúcich tvrdeniach:

(a) $\log(-1) = \log\left(\frac{1}{-1}\right) = \log(1) - \log(-1) = -\log(-1)$, takže, $\log(-1) = 0$.

(b) $1 = 1^{1/2} = ((-1)(-1))^{1/2} = (-1)^{1/2}(-1)^{1/2} = \imath\imath = -1$, takže, $1 = -1$.

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 2.11**
Napíšte nasledujúce výrazy v polárnom alebo kartézskom tvare. Explicitne označte akúkoľvek mnohohodnotovosť.

$$2^{2/5}, \quad 3^{1+\imath}, \quad \left(\sqrt{3} - \imath\right)^{1/4}, \quad 1^{\imath/4}.$$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 2.12**
Riešte $\cos z = 69$.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 2.13**
Riešte $\cot z = \imath 47$.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 2.14**
Určte všetky hodnoty

(a) $\log(-\imath)$

(b) $(-\imath)^{-\imath}$

(c) $3^{\pi}$

(d) $\log(\log(\imath))$

a znázornite ich v komplexnej rovine.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 2.15**
Vyhodnoťte a znázornite nasledujúce v komplexnej rovine:

(a) $(\cosh(\imath\pi))^{\imath 2}$

(b) $\log\left(\dfrac{1}{1+\imath}\right)$

(c) $\arctan(\imath 3)$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 2.16**
Stanovte všetky hodnoty $\imath^{\imath}$ a $\log\left((1+\imath)^{\imath\pi}\right)$ a znázornite ich v komplexnej rovine.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 2.17**
Nájdite všetky $z$ pre ktoré

(a) $\mathrm{e}^{z} = \imath$

(b) $\cos z = \sin z$

(c) $\tan^{2} z = -1$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 2.18**
Dokážte nasledujúce identity a identifikujte body vetvenia funkcií v rozšírenej komplexnej rovine.

(a) $\arctan(z) = \dfrac{\imath}{2}\log\left(\dfrac{\imath+z}{\imath-z}\right)$

(b) $\operatorname{arctanh}(z) = \dfrac{1}{2} \log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 2.19**
Stanovte počet vetiev a lokácií bodov vetvenia pre funkcie

(a) $\cos\left(z^{1/2}\right)$

(b) $(z+\imath)^{-z}$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 2.20**
Lokalizujte a klasifikujte všetky singularity nasledujúcich funkcií:

(a) $\dfrac{(z+1)^{1/2}}{z+2}$

(b) $\cos\left(\dfrac{1}{1+z}\right)$

(c) $\dfrac{1}{(1-\mathrm{e}^z)^2}$

V každom prípade diskutujte možnosť singularity v bode $\infty$.
Nápoveda, Riešenie

## 2.3 Nápovedy

**Nápoveda 2.1**

**Nápoveda 2.2**

**Nápoveda 2.3**
Spomeňte si že $\sin(z) = \frac{1}{\imath 2}\left(e^{\imath z} - e^{-\imath z}\right)$. Použite vzťahy 1.1 pre konverziu medzi kartézskym a polárnym tvarom.

**Nápoveda 2.4**
Napíšte $e^z$ v polárnom tvare.

**Nápoveda 2.5**
Exponenciálna funkcia je rastúcou funkciou pre reálnu premennu.

**Nápoveda 2.6**
Napíšte hyperbolický kotangens pomocou exponenciálnej funkcie.

**Nápoveda 2.7**
Vypíšte mnohohodnotovosť $2^z$. Existuje dvojnásobne nekonečná množina riešení pre tento problém.

**Nápoveda 2.8**
Vypíšte mnohohodnotovosť $1^z$.

**Nápoveda 2.9**

**Nápoveda 2.10**
Vypíšte mnohohodnotovosť daných výrazov.

**Nápoveda 2.11**
Preveďte exponenciáciu v polárnom tvare.

**Nápoveda 2.12**
Napíšte kosínus pomocou exponenciálnej funkcie. Vynásobte $e^{\imath z}$ aby ste dostali kvadratickú rovnicu pre $e^{\imath z}$.

**Nápoveda 2.13**
Napíšte kotangens pomocou exponenciálnej funkcie. Vytvorte kvadratickú rovnicu pre $e^{\imath z}$.

**Nápoveda 2.14**

**Nápoveda 2.15**

**Nápoveda 2.16**
$\imath^\imath$ má nekonečný počet reálnych kladných hodnôt. $\imath^\imath = e^{\imath \log \imath}$. $\log\left((1+\imath)^{\imath\pi}\right)$ má dvojnásobne nekonečnú množinu hodnôt. $\log\left((1+\imath)^{\imath\pi}\right) = \log(\exp(\imath\pi \log(1+\imath)))$.

**Nápoveda 2.17**

**Nápoveda 2.18**

**Nápoveda 2.19**

**Nápoveda 2.20**

**Nápoveda 2.21**

**Nápoveda 2.22**

**Nápoveda 2.23**

**Nápoveda 2.24**

**Nápoveda 2.25**
$\left(z^2+1\right)^{1/2}=(z-\imath)^{1/2}(z+\imath)^{1/2}$ $\left(z^3-z\right)^{1/2}=z^{1/2}(z-1)^{1/2}(z+1)^{1/2}$ $\log\left(z^2-1\right)=\log(z-1)+\log(z+1)$ $\log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)=\log(z+1)-\log(z-1)$

**Nápoveda 2.26**

**Nápoveda 2.27**
Obráťte orientáciu krivky tak aby obchádzala nekonečno a neobsahovala žiadne body vetvenia.

**Nápoveda 2.28**
Uvažujte krivku ktorá obchádza všetky body vetvenia v konečnej komplexnej rovine. Obráťte orientáciu krivky tak aby obchádzala nekonečno a neobsahovala žiadne body vetvenia v konečnej komplexnej rovine.

**Nápoveda 2.29**
Rozložte polynóm. Argument výrazu $z^{1/4}$ sa zmení o $\pi/2$ na krivke ktorá obchádza počiatok v kladnom smere.

**Nápoveda 2.30**

**Nápoveda 2.31**
Aby sme definovali vetvu, definujme uhly od každého bodu vetvenia v konečnej komplexnej rovine.

**Nápoveda 2.32**

**Nápoveda 2.33**

**Nápoveda 2.34**

**Nápoveda 2.35**

**Nápoveda 2.36**

**Nápoveda 2.37**

**Nápoveda 2.38**

## 2.4 Riešenia

**Riešenie 2.1**

Nech $w = u + \imath v$. Uvažujme pás $2 < x < 3$ ako zostavený z vertikálnych čiar. Uvažujme vertikálne čiary: $z = c + \imath y$, $y \in \mathbb{R}$ pre konštantné $c$. Nájdime obraz tejto priamky v zobrazení.

$$\begin{gathered} w = (c + \imath y)^2 \\ w = c^2 - y^2 + \imath 2cy \\ u = c^2 - y^2, \quad v = 2cy \end{gathered}$$

To je parabola, ktorá sa otvára vľavo. Túto krivku môžeme parametrizovať s použitím $v$.

$$u = c^2 - \frac{1}{4c^2} v^2, \quad v \in \mathbb{R}$$

Hranice oblasti, $x = 2$ a $x = 3$, sú jednotlivo zobrazené do parabol:

$$u = 4 - \frac{1}{16} v^2, \quad v \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad u = 9 - \frac{1}{36} v^2, \quad v \in \mathbb{R}$$

Vyjadríme obraz v množinovej terminológií.

$$\boxed{\left\{ w = u + \imath v : v \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad 4 - \frac{1}{16} v^2 < u < 9 - \frac{1}{36} v^2 \right\}.}$$

Viď obr. 2.1 so zobrazením pásu a jeho obrazu v zobrazení. Zobrazenie je prosté.

**Riešenie 2.2**

Napíšme zobrazenie $w = z^4$ v polárnych súradniciach.

$$w = z^4 = \left(r \, \mathrm{e}^{\imath\theta}\right)^4 = r^4 \, \mathrm{e}^{\imath 4\theta}$$

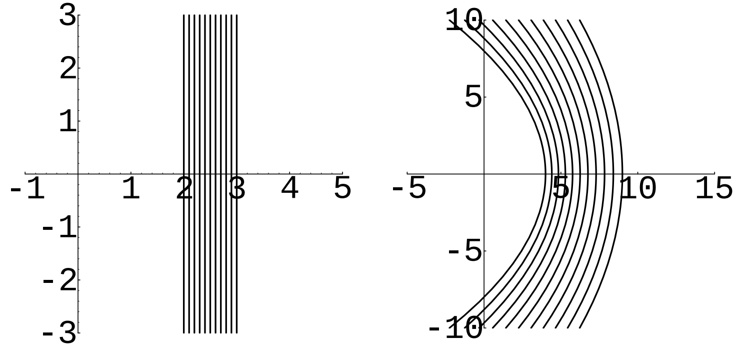
Takže vidíme že

$$w : \{r \, \mathrm{e}^{\imath\theta} \mid r \geq 0, 0 \leq \theta < \phi\} \to \{r^4 \, \mathrm{e}^{\imath 4\theta} \mid r \geq 0, 0 \leq \theta < \phi\} = \{r \, \mathrm{e}^{\imath\theta} \mid r \geq 0, 0 \leq \theta < 4\phi\}.$$

Môžeme to preformulovať do terminológie argumentu.

$$\boxed{w : \{z \mid 0 \leq \arg(z) < \phi\} \to \{z \mid 0 \leq \arg(z) < 4\phi\}}$$

Ak $\phi = \pi/2$, oblasť bude zobrazená presne na celú komplexnú rovinu.




Obr. 2.1: Oblasť $2 < x < 3$ a jej obraz v zobrazení $w = z^2$.

**Riešenie 2.3**

$$
\begin{aligned}
\sin z &= \frac{1}{\imath 2}\left(\mathrm{e}^{\imath z} - \mathrm{e}^{-\imath z}\right) \\
&= \frac{1}{\imath 2}\left(\mathrm{e}^{-y+\imath x} - \mathrm{e}^{y-\imath x}\right) \\
&= \frac{1}{\imath 2}\left(\mathrm{e}^{-y}(\cos x + \imath \sin x) - \mathrm{e}^{y}(\cos x - \imath \sin x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-y}(\sin x - \imath \cos x) + \mathrm{e}^{y}(\sin x + \imath \cos x)\right) \\
&= \sin x \cosh y + \imath \cos x \sinh y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin z &= \sqrt{\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y}\, \exp(\imath \arctan(\sin x \cosh y, \cos x \sinh y)) \\
&= \sqrt{\cosh^2 y - \cos^2 x}\, \exp(\imath \arctan(\sin x \cosh y, \cos x \sinh y)) \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\cosh(2y) - \cos(2x)\right)}\, \exp(\imath \arctan(\sin x \cosh y, \cos x \sinh y))
\end{aligned}
$$

**Riešenie 2.4**
Aby $\mathrm{e}^z$ bola nula, modul $\mathrm{e}^x$ musí byť nula. Keďže $\mathrm{e}^x$ nemá žiadne konečné riešenie, $\mathrm{e}^z = 0$ tiež nemá žiadne konečné riešenie.

**Riešenie 2.5**
Napíšme výrazy v katézskych súradniciach.

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{e}^{z^2}\right| &= \left|\mathrm{e}^{(x+\imath y)^2}\right| \\ &= \left|\mathrm{e}^{x^2-y^2+\imath 2xy}\right| \\ &= \mathrm{e}^{x^2-y^2}\end{aligned}$$

$$\mathrm{e}^{|z|^2} = \mathrm{e}^{|x+\imath y|^2} = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$$

Exponenciálna funkcia je rastúca pre reálne premenné. Keďže $x^2 - y^2 \leq x^2 + y^2$, $\mathrm{e}^{x^2-y^2} \leq \mathrm{e}^{x^2+y^2}$.

$$\left|\mathrm{e}^{z^2}\right| \leq \mathrm{e}^{|z|^2}$$

Rovnosť platí len keď $y = 0$.

**Riešenie 2.6**

$$\begin{gathered}\coth(z) = 1 \\ \frac{\left(\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}\right)/2}{\left(\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}\right)/2} = 1 \\ \mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z} = \mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z} \\ \mathrm{e}^{-z} = 0\end{gathered}$$

Neexistujú žiadne riešenia.

**Riešenie 2.7**
Napíšme mnohohodnotovosť $2^z$.

$$2 \in 2^z$$
$$e^{\ln 2} \in e^{z \log(2)}$$
$$e^{\ln 2} \in \{e^{z(\ln(2)+\imath 2\pi n)} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$
$$\ln 2 \in z\{\ln 2 + \imath 2\pi n + \imath 2\pi m \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$
$$\boxed{z = \left\{\frac{\ln(2) + \imath 2\pi m}{\ln(2) + \imath 2\pi n} \mid m, n \in \mathbb{Z}\right\}}$$

Overme riešenie. Uvažujme $m$ a $n$ ako fixné celé čísla. mnohohodnotovosť vyjadríme pomocou $k$.

$$\begin{aligned} 2^{(\ln(2)+\imath 2\pi m)/(\ln(2)+\imath 2\pi n)} &= e^{(\ln(2)+\imath 2\pi m)/(\ln(2)+\imath 2\pi n) \log(2)} \\ &= e^{(\ln(2)+\imath 2\pi m)/(\ln(2)+\imath 2\pi n)(\ln(2)+\imath 2\pi k)} \end{aligned}$$

Pre $k = n$, to nadobúda hodnotu $e^{\ln(2)+\imath 2\pi m} = e^{\ln(2)} = 2$.

**Riešenie 2.8**
Napíšme mnohohodnotovosť $1^z$.

$$1 \in 1^z$$
$$1 \in e^{z \log(1)}$$
$$1 \in \{e^{\imath z 2\pi n} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Prvok odpovedajúci $n = 0$ je $e^0 = 1$. Teda $1 \in 1^z$ má riešenia,

$$\boxed{z \in \mathbb{C}.}$$

To jest, $z$ môže byť ľubovoľné komplexné číslo. Overme toto riešenie.

$$1^z = e^{z \log(1)} = e^{\imath z 2\pi n}$$

Pre $n = 0$, to nadobúda hodnotu $1$.

**Riešenie 2.9**
Napíšme vzťah v tvare prirodzeného logaritmu a hlavnej hodnoty argumentu.

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}(z_1z_2) &= \operatorname{Log}(z_1)+\operatorname{Log}(z_2)\\ \ln|z_1z_2| + \imath\operatorname{Arg}(z_1z_2) &= \ln|z_1| + \imath\operatorname{Arg}(z_1) + \ln|z_2| + \imath\operatorname{Arg}(z_2)\\ \operatorname{Arg}(z_1z_2) &= \operatorname{Arg}(z_1)+\operatorname{Arg}(z_2)\end{aligned}$$

$\Re(z_k) > 0$ znamená že $\operatorname{Arg}(z_k) \in (-\pi/2 \ldots \pi/2)$. Teda $\operatorname{Arg}(z_1)+\operatorname{Arg}(z_2) \in (-\pi \ldots \pi)$. V tomto prípade vzťah platí.

Vzťah neplatí vo všeobecnom prípade pretože $\operatorname{Arg}(z_1)+\operatorname{Arg}(z_2)$ nie je nevyhnutne v intervale $(-\pi \ldots \pi]$. Uvažujme $z_1 = z_2 = -1$.

$$\operatorname{Arg}((-1)(-1)) = \operatorname{Arg}(1) = 0, \qquad \operatorname{Arg}(-1)+\operatorname{Arg}(-1) = 2\pi$$
$$\operatorname{Log}((-1)(-1)) = \operatorname{Log}(1) = 0, \qquad \operatorname{Log}(-1)+\operatorname{Log}(-1) = \imath 2\pi$$

**Riešenie 2.10**
(a) Algebraické manipulácie sú v poriadku. Napíšme mnohohodnotovosť logaritmov.

$$\log(-1) = \log\left(\frac{1}{-1}\right) = \log(1) - \log(-1) = -\log(-1)$$

$$\{\imath\pi + \imath 2\pi n : n \in \mathbb{Z}\} = \{\imath\pi + \imath 2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$$
$$= \{\imath 2\pi n : n \in \mathbb{Z}\} - \{\imath\pi + \imath 2\pi n : n \in \mathbb{Z}\} = \{-\imath\pi - \imath 2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$$

Teda $\log(-1) = -\log(-1)$. Avšak to neznamená že $\log(-1) = 0$. A to preto lebo logaritmus je mnohohodnotová funkcia a $\log(-1) = -\log(-1)$ v skutočnosti hovorí:

$$\{\imath\pi + \imath 2\pi n : n \in \mathbb{Z}\} = \{-\imath\pi - \imath 2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$$

(b) Uvažujme

$$1 = 1^{1/2} = ((-1)(-1))^{1/2} = (-1)^{1/2}(-1)^{1/2} = \imath\imath = -1.$$

Existujú tri mnohohodnotové výrazy uvedené vyššie.

$$1^{1/2} = \pm 1$$
$$((-1)(-1))^{1/2} = \pm 1$$
$$(-1)^{1/2}(-1)^{1/2} = (\pm\imath)(\pm\imath) = \pm 1$$

Takto môžeme vidieť že prvá a štvrtá nerovnosť sú nesprávne.

$$1 \neq 1^{1/2}, \quad (-1)^{1/2}(-1)^{1/2} \neq \imath\imath$$

**Riešenie 2.11**

$$\begin{aligned}
2^{2/5} &= 4^{1/5} \\
&= \sqrt[5]{4} 1^{1/5} \\
&= \sqrt[5]{4}\, \mathrm{e}^{\imath 2n\pi/5}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3^{1+\imath} &= \mathrm{e}^{(1+\imath)\log 3} \\
&= \mathrm{e}^{(1+\imath)(\ln 3 + \imath 2\pi n)} \\
&= \mathrm{e}^{\ln 3 - 2\pi n}\, \mathrm{e}^{\imath(\ln 3 + 2\pi n)}, \quad n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{3} - \imath\right)^{1/4} &= \left(2\,\mathrm{e}^{-\imath\pi/6}\right)^{1/4} \\
&= \sqrt[4]{2}\, \mathrm{e}^{-\imath\pi/24}\, 1^{1/4} \\
&= \sqrt[4]{2}\, \mathrm{e}^{\imath(\pi n/2 - \pi/24)}, \quad n = 0, 1, 2, 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1^{\imath/4} &= \mathrm{e}^{(\imath/4)\log 1} \\
&= \mathrm{e}^{(\imath/4)(\imath 2\pi n)} \\
&= \mathrm{e}^{-\pi n/2}, \quad n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

**Riešenie 2.12**

$$\cos z = 69$$
$$\frac{\mathrm{e}^{\imath z} + \mathrm{e}^{-\imath z}}{2} = 69$$
$$\mathrm{e}^{\imath 2z} - 138\,\mathrm{e}^{\imath z} + 1 = 0$$
$$\mathrm{e}^{\imath z} = \frac{1}{2}\left(138 \pm \sqrt{138^2 - 4}\right)$$
$$z = -\imath \log\left(69 \pm 2\sqrt{1190}\right)$$
$$z = -\imath\left(\ln\left(69 \pm 2\sqrt{1190}\right) + \imath 2\pi n\right)$$
$$\boxed{z = 2\pi n - \imath \ln\left(69 \pm 2\sqrt{1190}\right), \quad n \in \mathbb{Z}}$$

**Riešenie 2.13**

$$\cot z = \imath 47$$
$$\frac{\left(\mathrm{e}^{\imath z} + \mathrm{e}^{-\imath z}\right)/2}{\left(\mathrm{e}^{\imath z} - \mathrm{e}^{-\imath z}\right)/(\imath 2)} = \imath 47$$
$$\mathrm{e}^{\imath z} + \mathrm{e}^{-\imath z} = 47\left(\mathrm{e}^{\imath z} - \mathrm{e}^{-\imath z}\right)$$
$$46\,\mathrm{e}^{\imath 2z} - 48 = 0$$
$$\imath 2z = \log\frac{24}{23}$$
$$z = -\frac{\imath}{2}\log\frac{24}{23}$$
$$z = -\frac{\imath}{2}\left(\ln\frac{24}{23} + \imath 2\pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z}$$
$$\boxed{z = \pi n - \frac{\imath}{2}\ln\frac{24}{23}, \quad n \in \mathbb{Z}}$$

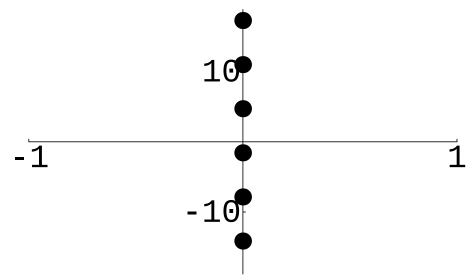
**Riešenie 2.14**

(a)

$$\begin{aligned}\log(-\imath) &= \ln|-\imath| + \imath\arg(-\imath)\\ &= \ln(1) + \imath\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

$$\boxed{\log(-\imath) = -\imath\frac{\pi}{2} + \imath 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}}$$

To sú navzájom rovnomerne vzdialené body na imaginárnej osi. Viď obr. 2.2.




Obr. 2.2: Hodnoty $\log(-\imath)$.

(b)

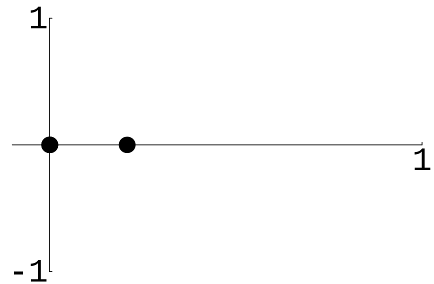
$$\begin{aligned}(-\imath)^{-\imath} &= \mathrm{e}^{-\imath\log(-\imath)}\\ &= \mathrm{e}^{-\imath(-\imath\pi/2+\imath 2\pi n)}, \quad n \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

$$\boxed{(-\imath)^{-\imath} = \mathrm{e}^{-\pi/2+2\pi n}, \quad n \in \mathbb{Z}}$$

Toto sú body na kladnej reálnej osi s akumulatívnym bodom v počiatku. Viď obr. 2.3.

(c)

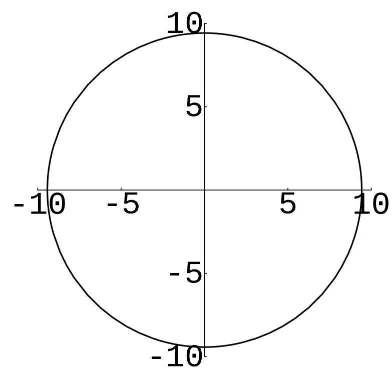
$$\begin{aligned}3^{\pi} &= \mathrm{e}^{\pi\log(3)}\\ &= \mathrm{e}^{\pi(\ln(3)+\imath\arg(3))}\end{aligned}$$




Obr. 2.3: Hodnoty of $(-\imath)^{-\imath}$.

$$\boxed{3^{\pi} = \mathrm{e}^{\pi(\ln(3)+\imath 2\pi n)}, \quad n \in \mathbb{Z}}$$

Všetky tieto body ležia na kružnici s polomerom $|e^{\pi}|$ so stredom v počiatku v komplexnej rovine. Viď obr. 2.4.

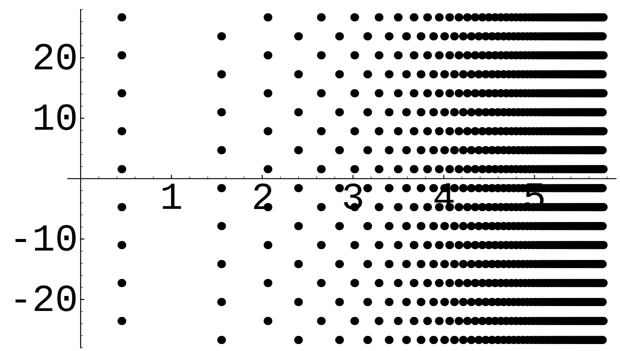



Obr. 2.4: Hodnoty $3^{\pi}$.

(d)

$$
\begin{aligned}
\log(\log(\imath)) &= \log\left(\imath\left(\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)\right), \quad m\in\mathbb{Z}\\
&= \ln\left|\frac{\pi}{2}+2\pi m\right| + \imath\,\mathrm{Arg}\left(\imath\left(\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)\right) + \imath 2\pi n, \quad m,n\in\mathbb{Z}\\
&= \ln\left|\frac{\pi}{2}+2\pi m\right| + \imath\,\mathrm{sign}(1+4m)\frac{\pi}{2} + \imath 2\pi n, \quad m,n\in\mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Všetky tieto body ležia v pravej polrovine. Viď obr. 2.5.

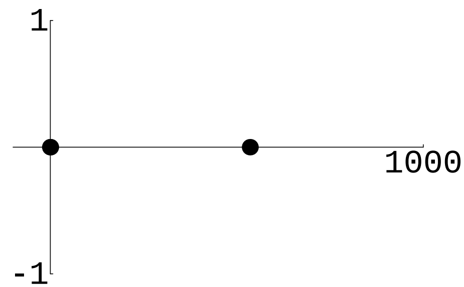



Obr. 2.5: Hodnoty $\log(\log(\imath))$.

**Riešenie 2.15**
(a)

$$
\begin{aligned}
(\cosh(\imath\pi))^{\imath 2} &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\imath\pi}+\mathrm{e}^{-\imath\pi}}{2}\right)^{\imath 2}\\
&= (-1)^{\imath 2}\\
&= \mathrm{e}^{\imath 2\log(-1)}\\
&= \mathrm{e}^{\imath 2(\ln(1)+\imath\pi+\imath 2\pi n)}, \quad n\in\mathbb{Z}\\
&= \mathrm{e}^{-2\pi(1+2n)}, \quad n\in\mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Toto sú body na kladnej reálnej osi s akumulatívnym bodom v počiatku. Viď obr. 2.6.

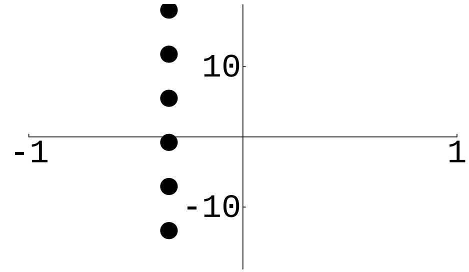



Obr. 2.6: Hodnoty $(\cosh(\imath\pi))^{\imath 2}$.

(b)

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{1}{1+\imath}\right) &= -\log(1+\imath) \\
&= -\log\left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\imath\pi/4}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\ln(2) - \log\left(\mathrm{e}^{\imath\pi/4}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\ln(2) - \imath\pi/4 + \imath 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Tieto body ležia na vertikálnej priamke v komplexnej rovine. Viď obr. 2.7.




Obr. 2.7: Hodnoty $\log\left(\frac{1}{1+\imath}\right)$.

(c)

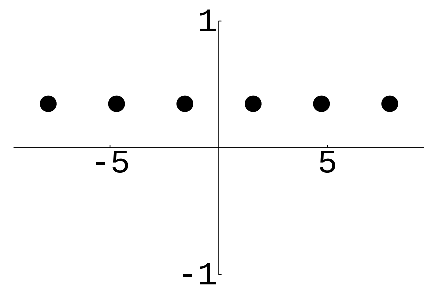
$$\begin{aligned}
\arctan(\imath 3) &= \frac{1}{\imath 2}\log\left(\frac{\imath-\imath 3}{\imath+\imath 3}\right)\\
&= \frac{1}{\imath 2}\log\left(-\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{\imath 2}\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\imath\pi+\imath 2\pi n\right), \quad n\in\mathbb{Z}\\
&= \frac{\pi}{2}+\pi n+\frac{\imath}{2}\ln(2)
\end{aligned}$$

Tieto body ležia na horizontálnej priamke v komplexnej rovine. Viď obr. 2.8.

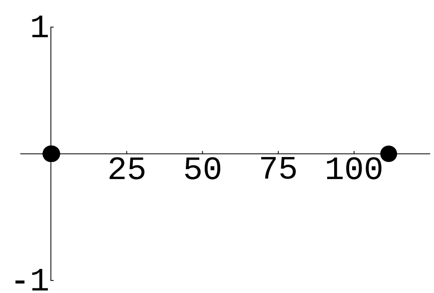
**Riešenie 2.16**

$$\begin{aligned}
\imath^{\imath} &= \mathrm{e}^{\imath\log(\imath)}\\
&= \mathrm{e}^{\imath(\ln|\imath|+\imath\,\mathrm{Arg}(\imath)+\imath 2\pi n)}, \quad n\in\mathbb{Z}\\
&= \mathrm{e}^{\imath(\imath\pi/2+\imath 2\pi n)}, \quad n\in\mathbb{Z}\\
&= \mathrm{e}^{-\pi(1/2+2n)}, \quad n\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Toto sú body na kladnej reálnej osi. Akumulatívny bod je v $z=0$. Viď obr. 2.9.



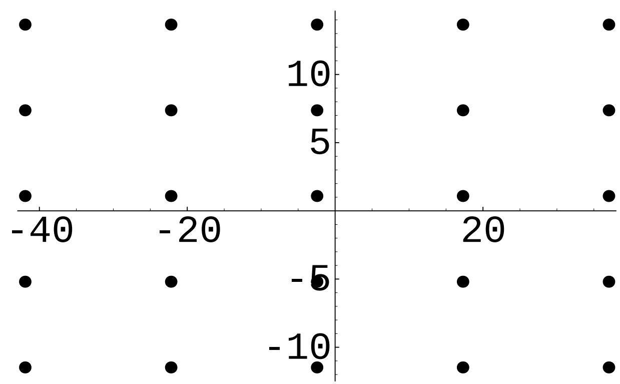

Obr. 2.8: Hodnoty $\arctan(\imath 3)$.




Obr. 2.9: Hodnoty $\imath^{\imath}$.

$$
\begin{aligned}
\log\left((1+\imath)^{\imath\pi}\right) &= \log\left(\mathrm{e}^{\imath\pi\log(1+\imath)}\right) \\
&= \imath\pi\log(1+\imath) + \imath 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\
&= \imath\pi\left(\ln|1+\imath| + \imath\operatorname{Arg}(1+\imath) + \imath 2\pi m\right) + \imath 2\pi n, \quad m,n \in \mathbb{Z} \\
&= \imath\pi\left(\frac{1}{2}\ln 2 + \imath\frac{\pi}{4} + \imath 2\pi m\right) + \imath 2\pi n, \quad m,n \in \mathbb{Z} \\
&= -\pi^2\left(\frac{1}{4} + 2m\right) + \imath\pi\left(\frac{1}{2}\ln 2 + 2n\right), \quad m,n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Viď obr. 2.10 pre nákres.




Obr. 2.10: Hodnoty $\log\left((1+\imath)^{\imath\pi}\right)$.

**Riešenie 2.17**
(a)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^z &= \imath \\
z &= \log \imath \\
z &= \ln|\imath| + \imath \arg(\imath) \\
z &= \ln(1) + \imath\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z} \\
&\boxed{z = \imath\frac{\pi}{2} + \imath 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}}
\end{aligned}
$$

(b) Rovnicu môžeme riešiť rozpísaním funkcií sínus a kosínus pomocou exponenciálnej funkcie.

$$
\begin{aligned}
\cos z &= \sin z \\
\frac{\mathrm{e}^{\imath z} + \mathrm{e}^{-\imath z}}{2} &= \frac{\mathrm{e}^{\imath z} - \mathrm{e}^{-\imath z}}{\imath 2} \\
(1+\imath)\,\mathrm{e}^{\imath z} &= (-1+\imath)\,\mathrm{e}^{-\imath z} \\
\mathrm{e}^{\imath 2z} &= \frac{-1+\imath}{1+\imath} \\
\mathrm{e}^{\imath 2z} &= \imath \\
\imath 2z &= \log(\imath) \\
\imath 2z &= \imath\frac{\pi}{2} + \imath 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\
&\boxed{z = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}}
\end{aligned}
$$

(c)

$$\begin{gathered}
\tan^2 z = -1 \\
\sin^2 z = -\cos^2 z \\
\cos z = \pm\imath \sin z \\
\frac{\mathrm{e}^{\imath z} + \mathrm{e}^{-\imath z}}{2} = \pm\imath \frac{\mathrm{e}^{\imath z} - \mathrm{e}^{-\imath z}}{\imath 2} \\
\mathrm{e}^{-\imath z} = -\,\mathrm{e}^{-\imath z} \quad \text{alebo} \quad \mathrm{e}^{\imath z} = -\,\mathrm{e}^{\imath z} \\
\mathrm{e}^{-\imath z} = 0 \quad \text{alebo} \quad \mathrm{e}^{\imath z} = 0 \\
\mathrm{e}^{y - \imath x} = 0 \quad \text{alebo} \quad \mathrm{e}^{-y + \imath x} = 0 \\
\mathrm{e}^{y} = 0 \quad \text{alebo} \quad \mathrm{e}^{-y} = 0 \\
\boxed{z = \emptyset}
\end{gathered}$$

Neexistujú žiadne riešenia pre konečné $z$.

**Riešenie 2.18**
(a)

$$
\begin{gathered}
w=\arctan(z)\\
z=\tan(w)\\
z=\frac{\sin(w)}{\cos(w)}\\
z=\frac{\left(\mathrm{e}^{\imath w}-\mathrm{e}^{-\imath w}\right)/(\imath 2)}{\left(\mathrm{e}^{\imath w}+\mathrm{e}^{-\imath w}\right)/2}\\
z\,\mathrm{e}^{\imath w}+z\,\mathrm{e}^{-\imath w}=-\imath\,\mathrm{e}^{\imath w}+\imath\,\mathrm{e}^{-\imath w}\\
(\imath+z)\,\mathrm{e}^{\imath 2w}=(\imath-z)\\
\mathrm{e}^{\imath w}=\left(\frac{\imath-z}{\imath+z}\right)^{1/2}\\
w=-\imath\log\left(\frac{\imath-z}{\imath+z}\right)^{1/2}\\
\boxed{\arctan(z)=\frac{\imath}{2}\log\left(\frac{\imath+z}{\imath-z}\right)}
\end{gathered}
$$

Identifikujme body vetvenia funkcie arkus tangens.

$$
\arctan(z)=\frac{\imath}{2}\left(\log(\imath+z)-\log(\imath-z)\right)
$$

Existujú body vetvenia v $z=\pm\imath$ kôli logaritmickým členom. Preskúmajme bod v nekonečne pomocou transformácie $\zeta=1/z$.

$$
\begin{gathered}
\arctan(1/\zeta)=\frac{\imath}{2}\log\left(\frac{\imath+1/\zeta}{\imath-1/\zeta}\right)\\
\arctan(1/\zeta)=\frac{\imath}{2}\log\left(\frac{\imath\zeta+1}{\imath\zeta-1}\right)
\end{gathered}
$$

Keď $\zeta\to 0$, argument logaritmického člena ide do $-1$, logaritmus nemá bod vetvenia v tomto bode. Keďže $\arctan(1/\zeta)$ nemá bod vetvenia v $\zeta=0$, $\arctan(z)$ nemá bod vetvenia v nekonečne.

(b)

$$
\begin{aligned}
w &= \operatorname{arctanh}(z) \\
z &= \tanh(w) \\
z &= \frac{\sinh(w)}{\cosh(w)} \\
z &= \frac{\left(e^{w} - e^{-w}\right)/2}{\left(e^{w} + e^{-w}\right)/2} \\
z\, e^{w} + z\, e^{-w} &= e^{w} - e^{-w} \\
(z-1)\, e^{2w} &= -z - 1 \\
e^{w} &= \left(\frac{-z-1}{z-1}\right)^{1/2} \\
w &= \log\left(\frac{z+1}{1-z}\right)^{1/2} \\
&\boxed{\operatorname{arctanh}(z) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}
\end{aligned}
$$

Identifikujme body vetvenia funkcie hyperbolický arkus tangens.

$$
\operatorname{arctanh}(z) = \frac{1}{2}\left(\log(1+z) - \log(1-z)\right)
$$

Existujú body vetvenia v $z = \pm 1$ kôli logaritmickým členom. Preskúmajme bod v nekonečne pomocou transformácie $\zeta = 1/z$.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{arctanh}(1/\zeta) &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+1/\zeta}{1-1/\zeta}\right) \\
\operatorname{arctanh}(1/\zeta) &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right)
\end{aligned}
$$

Keď $\zeta \to 0$, argument logaritmického člena ide do $-1$, logaritmus nemá bod vetvenia v tomto bode. Keďže $\operatorname{arctanh}(1/\zeta)$ nemá bod vetvenia v $\zeta = 0$, $\operatorname{arctanh}(z)$ nemá bod vetvenia v nekonečne.

**Riešenie 2.19**

(a)

$$\cos\left(z^{1/2}\right) = \cos\left(\pm\sqrt{z}\right) = \cos\left(\sqrt{z}\right)$$

Je to jednoznačná funkcia a neexistujú žiadne body vetvenia.

(b)

$$\begin{aligned}(z+\imath)^{-z} &= \mathrm{e}^{-z\log(z+\imath)} \\ &= \mathrm{e}^{-z(\ln|z+\imath|+\imath\operatorname{Arg}(z+\imath)+\imath 2\pi n)}, \quad n\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Existuje bod vetvenia v $z=-\imath$. Existuje nekonečne veľa vetiev.

**Riešenie 2.20**

(a) Existuje jednoduchý pól v $z=-2$. Funkcia má bod vetvenia v $z=-1$. Keďže je to jediný bod vetvenia v konečnej komplexnej rovine existuje tiež bod vetvenia v nekonečne. Môžeme to overiť pomocou substitúcie $z=1/\zeta$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\zeta}\right) &= \frac{(1/\zeta+1)^{1/2}}{1/\zeta+2} \\ &= \frac{\zeta^{1/2}(1+\zeta)^{1/2}}{1+2\zeta}\end{aligned}$$

Keďže $f(1/\zeta)$ má bod vetvenia v $\zeta=0$, $f(z)$ má bod vetvenia v nekonečne.

(b) $\cos z$ je holomorfná funkcia na celej komplexnej rovine s podstatnou singularitou v nekonečne. Teda $f(z)$ má singularity len v miestach kde $1/(1+z)$ má singularity. $1/(1+z)$ má jednoduchýpól v $z=-1$. Je analytická všade inde, vrátane bodu v nekonečne. Teda môžeme konštatovať že $f(z)$ má podstatnú singularitu v $z=-1$ a všade inde je analytická. Aby sme explicitne ukázali že $z=-1$ je podstatná singularita, môžeme nájsť rozvoj funkcie $f(z)$ do Laurentovho radu v $z=-1$.

$$\cos\left(\frac{1}{1+z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(z+1)^{-2n}$$

(c) $1-\mathrm{e}^z$ má jednoduché nuly v $z=\imath 2n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$. Teda $f(z)$ má dvojnásobné póly v týchto bodoch.

Bod v nekonečne je neizolovaná singularita. Aby sme to zdôvodnili: Všimnime si že

$$f(z) = \frac{1}{(1-\mathrm{e}^z)^2}$$

má dvojnásobné póly v $z = \imath 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. To znamená že $f(1/\zeta)$ má dvojnásobné póly v $\zeta = \frac{1}{\imath 2n\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$. Tieto dvojnásobné póly sú ľubovoľne blízko pri $\zeta = 0$. Neexistuje také okolie bodu okrem samotného bodu $\zeta = 0$, na ktorom by $f(1/\zeta)$ bola analytická. Teda bod $\zeta = 0$, $(z = \infty)$, je neizolovaná singularita. Neexistuje rozvoj do Laurentovho radu v bode $\zeta = 0$, $(z = \infty)$.

Bod v nekonečne nie je ani bod vetvenia ani odstraniteľná singularita. A nie je to ani pól. Keby bol, existovalo by také $n$ že $\lim_{z\to\infty} z^{-n} f(z) = \text{const} \neq 0$. Keďže $z^{-n} f(z)$ má dvojnásobne póly v každom okolí nekonečna má, okrem samotného nekonečna má, vyššieuvedená limita neexistuje. Takže môžeme vyvodiť záver že bod v nekonečne je podstatná singularita.

# Kapitola 3

# Analytické funkcie

## 3.1 Úvod

**Komplexná derivácia.** Komplexná derivácia je definovaná ako

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

ak limita existuje a je nezávislá od spôsobu akým $\Delta z \to 0$.
V kartézskych súradniciach

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial}{\partial x} = -\imath \frac{\partial}{\partial y},$$

a v polárnych súradniciach

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} = \mathrm{e}^{-\imath\theta} \frac{\partial}{\partial r} = -\frac{\imath}{r} \mathrm{e}^{-\imath\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Keďže komplexná derivácia je definovaná pomocou rovnakého vzorca ako reálna derivácia, všetky pravidlá diferenciálneho počtu funkcií reálnej premennej platia aj pre funkcie komplexnej premennej.

**Analytické funkcie.** Funkcia $f(z)$ je analytická v oblasti ak existuje komplexná derivácia $f'(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(z)$ na tejto oblasti.

**Nutná podmienka analytickosti (Cauchy-Riemannove rovnice)** *Kartézske súradnice:* Ak $f(z) = u(x, y) + \imath v(x, y)$, potom $u_x = v_y,\ u_y = -v_x$. *Polárne súradnice:* Ak $f(z) = u(r, \theta) + \imath v(r, \theta)$, potom $u_r = \frac{1}{r} v_\theta,\ u_\theta = -r v_r$. Ak $f(z) = u(x, y) + \imath v(x, y)$ je definovaná na nejakom okolí $z_0 = x_0 + \imath y_0$ a parciálne derivácie $u$ a $v$ sú spojité a spĺňajú Cauchy-Riemannove rovnice potom $f'(z_0)$ existuje.

**Harmonické funkcie.** Funkcia $u$ je harmonická ak jej druhé parciálne derivácie existujú, sú spojité a spĺňajú Laplaceovu rovnicu $\Delta u = 0$. V kartézskych súradniciach Laplacian má tvar $\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy}$. Ak $f(z) = u + \imath v$ je analytická funkcia potom $u$ a $v$ sú harmonické funkcie.

**Harmonicky združené funkcie.** Ak $u$ je harmonická na nejakej jednodocho súvislej oblasti, potom tam existuje harmonická funkcia $v$ taká že $f(z) = u + \imath v$ je analytická na danej oblasti. $v$ sa nazýva *harmonicky združená funkcia* k $u$. Harmonicky združená funkcia je definovaná až na aditívnu konštantu a je možné ju zistiť riešením Cauchy-Riemannových rovníc. Ak $f(z) = u + \imath v$ je analytická funkcia potom $u$ a $v$ sú harmonické funkcie, teda že ich Laplaciany sa rovnajú nule: $\Delta u = \Delta v = 0$. Laplacian v kartézskych a polárnych súradniciach má tvar

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad \Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

**Singularity.** Ak funkcia nie je analytická v nejakom bode, potom hovoríme že ten bod je *singulárny bod* alebo *singularita* funkcie.

**Delenie singularít:**

**Body vetvenia.** Body vetvenia mnohoznačných funkcií sú singularity.

**Odstrániteľné singularity.** Ak $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existuje, potom $z_0$ je odstrániteľná singularita. Taká singularita môže byť odstránená a funkcia sa stane analytickou v $z_0$ pomocou predefinovania hodnoty $f(z_0)$.

**Póly.** Ak $\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^n f(z) = \text{konšt.} \neq 0$ potom $f(z)$ má $n$-násobný pól v $z_0$.

**Podstatné singularity.** Ak $z_0$ nie je ani bod vetvenia, ani odstrániteľná singularita a ani pól, potom je to podstatná singularita.

**Izolované a neizolované singularity.** Nech $f(z)$ má singularitu v $z_0$. Ak existuje okolie bodu $z_0$, okrem samotného bodu $z_0$, ktoré neobsahuje žiadne ďalšie singularity, potom bod je **izolovanou singularitou**. Ináč to je **neizolovaná singularita**.

## 3.2 Úlohy

**Úloha 3.1**
Uvažujme dve funkcie $f(z)$ a $g(z)$ analytické v $z_0$, pričom $f(z_0) = g(z_0) = 0$ a $g'(z_0) \neq 0$.

(a) Použite definíciu komplexnej derivácie na odvodenie L'Hospitalovho pravidla:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

(b) Vypočítajte limity

$$\lim_{z \to \imath} \frac{1 + z^2}{2 + 2z^6}, \quad \lim_{z \to \imath\pi} \frac{\sinh(z)}{\mathrm{e}^z + 1}$$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 3.2**
Ukážte že ak $f(z)$ je analytická a $\phi(x, y) = f(z)$ je dvakrát spojite diferencovateľná, tak potom $f'(z)$ je analytická.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 3.3**
Nájdite komplexné derivácie v smere jednotlivých osí pre $f(z) = \phi(r, \theta)$.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 3.4**
Ukážte že nasledujúce funkcie nie sú nikde analytické pomocou overovania kde existujú derivácie podľa $z$.

(a) $\sin x \cosh y - \imath \cos x \sinh y$

(b) $x^2 - y^2 + x + \imath(2xy - y)$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 3.5**
Ak $f(z)$ je analytická na nejakej oblasti a má konštantnú reálnu časť, konštantnú imaginárnu časť, alebo konštantný modul, ukážte že $f(z)$ je konštantná.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 3.6**
Ukážte že funkcia

$$f(z) = \begin{cases} e^{-z^{-4}} & \text{pre } z \neq 0, \\ 0 & \text{pre } z = 0. \end{cases}$$

spĺňa Cauchy-Riemannove rovnice všade, vrátane bodu $z = 0$, ale $f(z)$ nie je analytická v počiatku.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 3.7**
Nájdite Cauchy-Riemannove rovnice pre nasledujúce tvary.

(a) $f(z) = R(r, \theta)\, \mathrm{e}^{\imath\Theta(r,\theta)}$

(b) $f(z) = R(x, y)\, \mathrm{e}^{\imath\Theta(x,y)}$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 3.8**
(a) Ukážte že $\mathrm{e}^{\overline{z}}$ nie je analytická.

(b) Nech $f(z)$ je analytická funkcia $z$. Ukážte že $\overline{f}(z) = \overline{f\left(\overline{z}\right)}$ je tiež analytická funkcia $z$.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 3.9**
(a) Určte všetky body $z = x + \imath y$ kde sú nasledujúce funkcie diferencovateľné vzhľadom na $z$:

(i) $x^3 + y^3$

(ii) $\dfrac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} - \imath \dfrac{y}{(x-1)^2 + y^2}$

(b) Určte všetky body $z$ kde sú tieto funkcie analytické.

(c) Určte ktoré z nasledujúcich funkcií $v(x, y)$ sú imaginárnou časťou analytickej funkcie $u(x, y) + \imath v(x, y)$. Pre tie ktore sú, vypočítajte reálnu časť $u(x, y)$ a prepíšte odpoveď v tvare explicitnej funkcie $z = x + \imath y$:

(i) $x^2 - y^2$

(ii) $3x^2 y$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 3.10**
Nech

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^{4/3}y^{5/3}+\imath x^{5/3}y^{4/3}}{x^2+y^2} & \text{pre } z \neq 0, \\ 0 & \text{pre } z = 0. \end{cases}$$

Ukážte že Cauchy-Riemannove rovnice platia v $z = 0$, ale že $f$ nie je diferencovateľná v tomto bode.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 3.11**
Uvažujte komplexnú funkciu

$$f(z) = u + \imath v = \begin{cases} \frac{x^3(1+\imath)-y^3(1-\imath)}{x^2+y^2} & \text{pre } z \neq 0, \\ 0 & \text{pre } z = 0. \end{cases}$$

Ukážte že parciálne derivácie $u$ a $v$ vzhľadom na $x$ a $y$ existujú v $z = 0$ a že tam $u_x = v_y$ a $u_y = -v_x$: Cauchy-Riemannove rovnice platia v $z = 0$. Na druhej strane, ukážte že

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z}$$

neexistujé a teda že $f$ nie je komplexne diferencovateľná v $z = 0$.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 3.12**
Ukážte že funkcia $\log z$ je diferencovateľná pre $z \neq 0$. Nájdite deriváciu logaritmu.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 3.13**
Ukážte že Cauchy-Riemannove rovnice pre analytickú funkciu $f(z) = u(r, \theta) + \imath v(r, \theta)$ sú

$$u_r = v_\theta / r, \quad u_\theta = -r v_r.$$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 3.14**
Nech $w = u + \imath v$ je analytická funkcia $z$. Nech $\phi(x, y)$ je ľubovoľná hladká funkcia $x$ a $y$. Vyjadrené pomocou $u$ a $v$, $\phi(x, y) = \Phi(u, v)$. Ukážte že ($w' \neq 0$)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \imath \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \left( \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} \right)^{-1} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} - \imath \frac{\partial \phi}{\partial y} \right).$$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 3.15**
Ukážte že funkcie definované ako $f(z) = \log|z| + \imath \arg(z)$ a $f(z) = \sqrt{|z|}\, \mathrm{e}^{\imath \arg(z)/2}$ sú analytické v oblasti $|z| > 0$, $|\arg(z)| < \pi$. Aké sú jednotlivé derivácie $\mathrm{d}f/\mathrm{d}z$?
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 3.16**
Ukážte že nasledujúce funkcie $u(x, y)$ sú harmonické. Pre každú z nich nájdite príslušnu funkciu $v(x, y)$, tak aby $w = u + \imath v$ bola analytická funkcia.

(a) $u(x, y) = x \operatorname{Log}(r) - y \arctan(x, y)$ ($r \neq 0$)

(b) $u(x, y) = \arg(z)$ ($|\arg(z)| < \pi$, $r \neq 0$)

(c) $u(x, y) = r^n \cos(n\theta)$

(d) $u(x, y) = y/r^2$ ($r \neq 0$)

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 3.17**
(a) Použite Cauchy-Riemannove rovnice na stanovenie kde je funkcia

$$f(z) = (x - y)^2 + \imath 2(x + y)$$

diferencovateľná a kde je analytická.

(b) Vyhodnoťte deriváciu

$$f(z) = \mathrm{e}^{x^2 - y^2}(\cos(2xy) + \imath \sin(2xy))$$

a popíšte oblasť analytickosti.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 3.18**
Uvažujte funkciu $f(z) = u + \imath v$ s reálnymi a imaginárnymi časťami vyjadrenými pomocou $x$ a $y$ alebo $r$ a $\theta$.

(a) Ukážte že Cauchy-Riemannove rovnice

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

sú splnené a tieto parciálne derivácie sú spojité v bode $z$ práve vtedy keď polárny tvar Cauchy-Riemannovych rovníc

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta, \quad \frac{1}{r} u_\theta = -v_r$$

platí a tieto parciálne derivácie sú tam spojité.

(b) Ukážte že sa dá ľahko overiť že $\operatorname{Log} z$ je analytická pre $r > 0$ a $-\pi < \theta < \pi$ s použitím polárneho tvaru Cauchy-Riemannovych rovníc a že hodnota derivácie sa dá ľahko získať zo vzťahu pre polárne derivácie.

(c) Ukážte že v polárnych súradniciach, Laplaceova rovnica nadobúda tvar

$$\phi_{rr} + \frac{1}{r}\phi_r + \frac{1}{r^2}\phi_{\theta\theta} = 0.$$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 3.19**

Určte ktoré z nasledujúcich funkcií sú reálnymi časťami analytickej funkcie a nájdite $f(z)$ pre tie ktoré sú.

(a) $u(x, y) = x^3 - y^3$

(b) $u(x, y) = \sinh x \cos y + x$

(c) $u(r, \theta) = r^n \cos(n\theta)$

Nápoveda, Riešenie

## 3.3 Nápovedy

**Nápoveda 3.1**

**Nápoveda 3.2**
Začnite s Cauchy-Riemannovymi rovnicami a potom derivujte podľa $x$.

**Nápoveda 3.3**

**Nápoveda 3.4**

**Nápoveda 3.5**

**Nápoveda 3.6**

**Nápoveda 3.7**
Použite výsledok 3.3.

**Nápoveda 3.8**
Použite Cauchy-Riemannove rovnice.

**Nápoveda 3.9**

**Nápoveda 3.10**
Na vyhodnotenie $u_x(0,0)$, atď. použite definíciu derivácie. Pokúste sa nájsť $f'(z)$ pomocou definície komplexnej derivácie. Uvažujte $\Delta z = \Delta r\, \mathrm{e}^{\imath\theta}$.

**Nápoveda 3.11**
Na vyhodnotenie $u_x(0,0)$, atď. použite definíciu derivácie. Pokúste sa nájsť $f'(z)$ pomocou definície komplexnej derivácie. Uvažujte $\Delta z = \Delta r\, \mathrm{e}^{\imath\theta}$.

**Nápoveda 3.12**

**Nápoveda 3.13**

**Nápoveda 3.14**

**Nápoveda 3.15**

**Nápoveda 3.16**

**Nápoveda 3.17**

**Nápoveda 3.18**

**Nápoveda 3.19**

**Nápoveda 3.20**

**Nápoveda 3.21**

## 3.4 Riešenia

**Riešenie 3.1**

(a) Uvažujme L'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

Začneme pravou stranou a ukážeme že je rovná ľavej strane. Najprv použijeme definíciu komplexnej derivácie.

$$\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} = \frac{\lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(z_0+\epsilon)-f(z_0)}{\epsilon}}{\lim_{\delta \to 0} \frac{g(z_0+\delta)-g(z_0)}{\delta}} = \frac{\lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(z_0+\epsilon)}{\epsilon}}{\lim_{\delta \to 0} \frac{g(z_0+\delta)}{\delta}}$$

Keďže obidve limity existujú, môžeme vziať limity s $\epsilon = \delta$.

$$\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(z_0+\epsilon)}{g(z_0+\epsilon)}$$
$$\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$$

To dokazuje L'Hospitalovo pravidlo.

(b)

$$\lim_{z \to \imath} \frac{1+z^2}{2+2z^6} = \left[\frac{2z}{12z^5}\right]_{z=\imath} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{z \to \imath\pi} \frac{\sinh(z)}{\mathrm{e}^z + 1} = \left[\frac{\cosh(z)}{\mathrm{e}^z}\right]_{z=\imath\pi} = 1$$

**Riešenie 3.2**

Začneme s Cauchy-Riemannovymi rovnicami a potom derivujeme podľa $x$.

$$\phi_x = -\imath \phi_y$$
$$\phi_{xx} = -\imath \phi_{yx}$$

Zameníme poradie derivovania.

$$(\phi_x)_x = -\imath (\phi_x)_y$$
$$(f')_x = -\imath (f')_y$$

Keďže $f'(z)$ vyhovuje Cauchy-Riemannovym rovniciam a jej parciálne derivácie existujú a sú spojité, je analytická.

**Riešenie 3.3**
Vypočítajme komplexné derivácie v smeroch osí.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \left(\frac{\partial\left(r\,\mathrm{e}^{\imath\theta}\right)}{\partial r}\right)^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial r} = \mathrm{e}^{-\imath\theta}\,\frac{\partial\phi}{\partial r},$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \left(\frac{\partial\left(r\,\mathrm{e}^{\imath\theta}\right)}{\partial \theta}\right)^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial \theta} = -\frac{\imath}{r}\,\mathrm{e}^{-\imath\theta}\,\frac{\partial\phi}{\partial \theta}.$$

Môžeme to napísať v operátorovej terminiológii.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} = \mathrm{e}^{-\imath\theta}\,\frac{\partial}{\partial r} = -\frac{\imath}{r}\,\mathrm{e}^{-\imath\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}$$

**Riešenie 3.4**

(a) Uvažujme $f(x, y) = \sin x \cosh y - \imath \cos x \sinh y$. Derivácie v smeroch osí $x$ a $y$ sú

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \cos x \cosh y + \imath \sin x \sinh y\\ -\imath\frac{\partial f}{\partial y} &= -\cos x \cosh y - \imath \sin x \sinh y\end{aligned}$$

Tieto derivácie existujú a sú všade spojité. Dajme výrazy do rovnosti a vytvoríme sústavu dvoch rovníc.

$$\cos x \cosh y = -\cos x \cosh y, \qquad \sin x \sinh y = -\sin x \sinh y$$
$$\cos x \cosh y = 0, \qquad \sin x \sinh y = 0$$
$$\left(x = \frac{\pi}{2} + n\pi\right) \text{ a } (x = m\pi \text{ alebo } y = 0)$$

Funkcie môžu byť diferencovateľné len v bodoch

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad y = 0.$$

Teda funkcia nie je nikde analytická.

(b) Uvažujme $f(x, y) = x^2 - y^2 + x + \imath(2xy - y)$. Derivácie v smeroch osí $x$ a $y$ sú

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x + 1 + \imath 2y\\ -\imath\frac{\partial f}{\partial y} &= \imath 2y + 2x - 1\end{aligned}$$

Tieto derivácie existujú a sú všade spojité. Dajme výrazy do rovnosti a vytvoríme sústavu dvoch rovníc.

$$2x + 1 = 2x - 1, \qquad 2y = 2y.$$

Keďže táto sústava rovníc nemá riešenie, neexistujú body v ktorých je funkcia diferencovateľná. Funkcia nie je nikde analytická.

**Riešenie 3.5**
**Konštantná reálna časť.** Najprv predpokladajme že $f(z)$ má konštantnú reálnu časť. Riešme Cauchy-Riemannove rovnice a určme imaginárnu časť.

$$\begin{gathered} u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \\ v_x = 0, \quad v_y = 0 \end{gathered}$$

Integrujme prvú rovnicu a dostaneme $v = a + g(y)$ kde $a$ je konštanta a $g(y)$ je ľubovoľná funkcia. Potom to dosaďme do druhej rovnice a určme $g(y)$.

$$\begin{gathered} g'(y) = 0 \\ g(y) = b \end{gathered}$$

Vidíme že imaginárna časť $f(z)$ je konštanta a teda že $f(z)$ je konštanta.

**Konštantná imaginárna časť.** ďalej predpokladajme že $f(z)$ má konštantnú imaginárnu časť. Riešme Cauchy-Riemannove rovnice a určme reálnu časť.

$$\begin{gathered} u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \\ u_x = 0, \quad u_y = 0 \end{gathered}$$

Integrujme prvú rovnicu a dostaneme $u = a + g(y)$ kde $a$ je konštanta a $g(y)$ je ľubovoľná funkcia. Potom to dosaďme do druhej rovnice a určme $g(y)$.

$$\begin{gathered} g'(y) = 0 \\ g(y) = b \end{gathered}$$

Vidíme že reálna časť $f(z)$ je konštanta a teda že $f(z)$ je konštanta.

**Konštantný modul.** Nakoniec predpokladajme že $f(z)$ má konštantný modul.

$$\begin{gathered} |f(z)| = \text{konštanta} \\ \sqrt{u^2 + v^2} = \text{konštanta} \\ u^2 + v^2 = \text{konštanta} \end{gathered}$$

Derivujme túto rovnicu podľa $x$ a $y$.

$$2uu_x + 2vv_x = 0, \quad 2uu_y + 2vv_y = 0$$
$$\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$$

Tento systém má netriviálne riešenia pre $u$ a $v$ len ak je matica nesingulárna. (Triviálnym riešenim $u = v = 0$ je konštantná funkcia $f(z) = 0$.) Položme determinant matice rovný nule.

$$u_x v_y - u_y v_x = 0$$

Použijme Cauchy-Riemannove rovnice na zápis pomocou $u_x$ a $u_y$.

$$u_x^2 + u_y^2 = 0$$
$$u_x = u_y = 0$$

Keďže jej parciálne derivácie sa rovnajú nule, $u$ je konštanta. Z Cauchy-Riemannovych rovníc vidíme že parciálne derivácie $v$ sa taktiež rovnajú nule, takže je konštanta. Môžeme teda uzavrieť že $f(z)$ je konštanta.

**Konštaný modul.** Riešme Cauchy-Riemannove rovnice v polárnom tvare a určme argument $f(z) = R(x, y)\, \mathrm{e}^{\imath\Theta(x,y)}$. Keďže funkcia má konštantný modul $R$, jej parciálne derivácie sa rovnajú nule.

$$R_x = R\Theta_y, \quad R_y = -R\Theta_x$$
$$R\Theta_y = 0, \quad R\Theta_x = 0$$

Rovnice platia pre $R = 0$. Pre tento prípad, $f(z) = 0$. Uvažujme nenulové $R$.

$$\Theta_y = 0, \quad \Theta_x = 0$$

Vidíme že argument $f(z)$ je konštanta a teda že $f(z)$ je konštanta.

**Riešenie 3.6**

Najprv overme že Cauchy-Riemannove rovnice sú splnené pre $z \neq 0$. Všimnime si že pre tento problem bude tvar

$$f_x = -\imath f_y$$

vhodnejší než tvar

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

.

$$f_x = 4(x + \imath y)^{-5}\,\mathrm{e}^{-(x+\imath y)^{-4}}$$
$$-\imath f_y = -\imath 4(x + \imath y)^{-5}\imath\,\mathrm{e}^{-(x+\imath y)^{-4}} = 4(x + \imath y)^{-5}\,\mathrm{e}^{-(x+\imath y)^{-4}}$$

Cauchy-Riemannove rovnice platia pre $z \neq 0$.

Teraz uvažujme bod $z = 0$.

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{-\Delta x^{-4}}}{\Delta x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\imath f_y(0,0) &= -\imath \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} \\ &= -\imath \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\mathrm{e}^{-\Delta y^{-4}}}{\Delta y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Cauchy-Riemannove rovnice platia pre $z = 0$.

$f(z)$ nie je analytická v bode $z = 0$. Ukážeme to vypočítaním derivácie.

$$f'(0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(\Delta z)}{\Delta z}$$

Nech $\Delta z = \Delta r\,\mathrm{e}^{\imath\theta}$, to znamená že sa približujeme k počiatku pod uhlom $\theta$.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{f\left(\Delta r\,\mathrm{e}^{\imath\theta}\right)}{\Delta r\,\mathrm{e}^{\imath\theta}} \\ &= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\mathrm{e}^{-r^{-4}\,\mathrm{e}^{-\imath 4\theta}}}{\Delta r\,\mathrm{e}^{\imath\theta}} \end{aligned}$$

Pre vačšinu hodnôt $\theta$ limita neexistuje. Uvažujme $\theta = \pi/4$.

$$f'(0) = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\mathrm{e}^{r^{-4}}}{\Delta r\,\mathrm{e}^{\imath\pi/4}} = \infty$$

Keďže limita neexistuje, funkcia nie je diferencovateľná v $z = 0$. Spomeňme si že splnenie Cauchy-Riemannových rovníc je nutnou ale nie postačujúcou podmienkou diferencovateľnosti.

**Riešenie 3.7**

(a) Nájdime Cauchy-Riemannove rovnice pre

$$f(z) = R(r, \theta) \, \mathrm{e}^{\imath \Theta(r,\theta)} \, .$$

Z úlohy 3.3 vieme že komplexná derivácia v smeroch polárnych súradníc je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} = \mathrm{e}^{-\imath\theta} \, \frac{\partial}{\partial r} = -\frac{\imath}{r} \, \mathrm{e}^{-\imath\theta} \, \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Dajme do rovnosti derivácie v obidvoch smeroch.

$$\mathrm{e}^{-\imath\theta} \, \frac{\partial}{\partial r} \left[ R \, \mathrm{e}^{\imath\Theta} \right] = -\frac{\imath}{r} \, \mathrm{e}^{-\imath\theta} \, \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ R \, \mathrm{e}^{\imath\Theta} \right]$$
$$(R_r + \imath R \Theta_r) \, \mathrm{e}^{\imath\Theta} = -\frac{\imath}{r} \, (R_\theta + \imath R \Theta_\theta) \, \mathrm{e}^{\imath\Theta}$$

Predeľme $\mathrm{e}^{\imath\Theta}$ a dajme do rovnosti reálne a imaginárne časti a dostaneme Cauchy-Riemannove rovnice.

$$R_r = \frac{R}{r} \Theta_\theta, \qquad \frac{1}{r} R_\theta = -R \Theta_r$$

(b) Nájdeme Cauchy-Riemannove rovnice pre

$$f(z) = R(x, y) \, \mathrm{e}^{\imath \Theta(x,y)} \, .$$

Dajme do rovnosti derivácie v smeroch osí $x$ a $y$.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ R \, \mathrm{e}^{\imath\Theta} \right] = -\imath \frac{\partial}{\partial y} \left[ R \, \mathrm{e}^{\imath\Theta} \right]$$
$$(R_x + \imath R \Theta_y) \, \mathrm{e}^{\imath\Theta} = -\imath \, (R_x + \imath R \Theta_y) \, \mathrm{e}^{\imath\Theta}$$

Predeľme $\mathrm{e}^{\imath\Theta}$ a dajme do rovnosti reálne a imaginárne časti a dostaneme Cauchy-Riemannove rovnice.

$$R_x = R \Theta_y, \qquad R_y = -R \Theta_x$$

**Riešenie 3.8**

(a) Nutná podmienka pre analytickosť na otvorenej množine je splnenie Cauchy-Riemannovych rovníc na danej množine. Napíšme $\mathrm{e}^{\overline{z}}$ v kartézskom tvare.

$$\mathrm{e}^{\overline{z}} = \mathrm{e}^{x - \imath y} = \mathrm{e}^x \cos y - \imath \, \mathrm{e}^x \sin y.$$

Teraz určime kde $u = \mathrm{e}^x \cos y$ a $v = -\mathrm{e}^x \sin y$ spĺňajú Cauchy-Riemannove rovnice.

$$\begin{aligned} u_x &= v_y, & u_y &= -v_x \\ \mathrm{e}^x \cos y &= -\mathrm{e}^x \cos y, & -\mathrm{e}^x \sin y &= \mathrm{e}^x \sin y \\ \cos y &= 0, & \sin y &= 0 \\ y &= \frac{\pi}{2} + \pi m, & y &= \pi n \end{aligned}$$

Teda vidíme že Cauchy-Riemannove rovnice nie sú nikde splnené. $\mathrm{e}^{\overline{z}}$ nie je nikde analytická.

(b) Keďže $f(z) = u + \imath v$ je analytická, $u$ a $v$ spĺňajú Cauchy-Riemannove rovnice a ich prvé parciálne derivácie sú spojité.

$$\overline{f}(z) = \overline{f\left(\overline{z}\right)} = \overline{u(x, -y) + \imath v(x, -y)} = u(x, -y) - \imath v(x, -y)$$

Definujme $\overline{f}(z) \equiv \mu(x, y) + \imath \nu(x, y) = u(x, -y) - \imath v(x, y)$. Teraz vidíme či $\mu$ a $\nu$ spĺňajú Cauchy-Riemannove rovnice.

$$\begin{aligned} \mu_x &= \nu_y, & \mu_y &= -\nu_x \\ (u(x, -y))_x &= (-v(x, -y))_y, & (u(x, -y))_y &= -(-v(x, -y))_x \\ u_x(x, -y) &= v_y(x, -y), & -u_y(x, -y) &= v_x(x, -y) \\ u_x &= v_y, & u_y &= -v_x \end{aligned}$$

Teraz vidíme že Cauchy-Riemannove rovnice pre $\mu$ a $\nu$ sú splnené práve vtedy ak Cauchy-Riemannove rovnice pre $u$ a $v$ sú splnené. Spojitosť prvých parciálnych derivácií $u$ a $v$ znamená to isté pre $\mu$ a $\nu$. Teda $\overline{f}(z)$ je analytická.

**Riešenie 3.9**

(a) Nutná podmienka diferencovateľnosti funkcie $f(z) = u + \imath v$ v bode je splnenie Cauchy-Riemannových rovníc a aby prvé parciálne derivácie $u$ a $v$ boli v danom bode spojité.

(i)

$$f(z) = x^3 + y^3 + \imath 0$$

Cauchy-Riemannove rovnice sú

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \quad \text{a} \quad u_y = -v_x \\ 3x^2 &= 0 \quad \text{a} \quad 3y^2 = 0 \\ x &= 0 \quad \text{a} \quad y = 0 \end{aligned}$$

Prvé parciálne derivácie sú spojité. Teda vidíme že funkcia je diferencovateľná len v bode $z = 0$.

(ii)

$$f(z) = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} - \imath \frac{y}{(x-1)^2+y^2}$$

Cauchy-Riemannove rovnice sú

$$u_x = v_y \quad \text{a} \quad u_y = -v_x$$
$$\frac{-(x-1)^2+y^2}{((x-1)^2+y^2)^2} = \frac{-(x-1)^2+y^2}{((x-1)^2+y^2)^2} \quad \text{a} \quad \frac{2(x-1)y}{((x-1)^2+y^2)^2} = \frac{2(x-1)y}{((x-1)^2+y^2)^2}$$

Cauchy-Riemannove rovnice sú splnené. Prvé parciálne derivácie sú spojité všade okrem bodu $x = 1$, $y = 0$. Teda funkcia je diferencovateľná všade okrem $z = 1$.

(b) (i) Funkcia nie je diferencovateľná na žiadnej otvorenej množine. Teda funkcia nie je nikde analytická.

(ii) Funkcia je diferencovateľná všade okrem $z = 1$. Teda funkcia je analytická všade okrem $z = 1$.

(c) (i) Najprv určíme či je funkcia harmonická.

$$v = x^2 - y^2$$
$$v_{xx} + v_{yy} = 0$$
$$2 - 2 = 0$$

Funkcia je harmonická v komplexnej rovine a je to imaginárna časť nejakej analytickej funkcie. Pozorovaním vidíme že táto funkcia je

$$\imath z^2 + c = -2xy + c + \imath\left(x^2 - y^2\right),$$

kde $c$ je reálna konštanta. Funkciu tiež môžeme nájsť riešením Cauchy-Riemannovych rovníc.

$$u_x = v_y \quad \text{a} \quad u_y = -v_x$$
$$u_x = -2y \quad \text{a} \quad u_y = -2x$$

Integrujeme prvú rovnicu.

$$u = -2xy + g(y)$$

$g(y)$ je tu funkciou integrácie. Substituujme to do druhej Cauchy-Riemannovej rovnice a určme $g(y)$.

$$
\begin{gathered}
u_y = -2x \\
-2x + g'(y) = -2x \\
g'(y) = 0 \\
g(y) = c \\
u = -2xy + c \\
f(z) = -2xy + c + \imath\left(x^2 - y^2\right) \\
f(z) = \imath z^2 + c
\end{gathered}
$$

(ii) Najprv určme či je funkcia harmonická.

$$
\begin{gathered}
v = 3x^2 y \\
v_{xx} + v_{yy} = 6y
\end{gathered}
$$

Funkcia nie je harmonická. Nie je imaginárnou časťou žiadnej analytickej funkcie.

**Riešenie 3.10**
Napíšme reálnu a imaginárnu časť $f(z) = u + \imath v$.

$$
u = \begin{cases} \frac{x^{4/3} y^{5/3}}{x^2+y^2} & \text{pre } z \neq 0, \\ 0 & \text{pre } z = 0. \end{cases}, \qquad v = \begin{cases} \frac{x^{5/3} y^{4/3}}{x^2+y^2} & \text{pre } z \neq 0, \\ 0 & \text{pre } z = 0. \end{cases}
$$

Cauchy-Riemannove rovnice sú

$$
u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.
$$

Vypočítajme parciálne derivácie $u$ a $v$ v bode $x = y = 0$ s použitím definície derivácie.

$$
\begin{aligned}
u_x(0,0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(\Delta x, 0) - u(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0 \\
v_x(0,0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(\Delta x, 0) - v(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0 \\
u_y(0,0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(0, \Delta y) - u(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0 \\
v_y(0,0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(0, \Delta y) - v(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0
\end{aligned}
$$

Keďže $u_x(0,0) = u_y(0,0) = v_x(0,0) = v_y(0,0) = 0$, Cauchy-Riemannove rovnice sú splnené. $f(z)$ nie je analytická v bode $z = 0$. Ukážeme to výpočtom derivácie v tom bode.

$$f'(0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(\Delta z)}{\Delta z}$$

Nech $\Delta z = \Delta r \, \mathrm{e}^{\imath\theta}$, to znamená že sa blížime k počiatku pod uhlom $\theta$. Potom $x = \Delta r \cos\theta$ a $y = \Delta r \sin\theta$.

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{f\left(\Delta r \, \mathrm{e}^{\imath\theta}\right)}{\Delta r \, \mathrm{e}^{\imath\theta}} \\
&= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\frac{\Delta r^{4/3} \cos^{4/3}\theta \Delta r^{5/3} \sin^{5/3}\theta + \imath \Delta r^{5/3} \cos^{5/3}\theta \Delta r^{4/3} \sin^{4/3}\theta}{\Delta r^2}}{\Delta r \, \mathrm{e}^{\imath\theta}} \\
&= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\cos^{4/3}\theta \sin^{5/3}\theta + \imath \cos^{5/3}\theta \sin^{4/3}\theta}{\mathrm{e}^{\imath\theta}}
\end{aligned}$$

Hodnota limity závisí od $\theta$ a nie je konštantná. Teda táto limita neexistuje. Funkcia nie je diferencovateľná v $z = 0$.

**Riešenie 3.11**

$$u = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{pre } z \neq 0, \\ 0 & \text{pre } z = 0. \end{cases}, \qquad v = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{pre } z \neq 0, \\ 0 & \text{pre } z = 0. \end{cases}$$

Cauchy-Riemannove rovnice sú

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.$$

Parciálne derivácie $u$ a $v$ v bode $x = y = 0$ sú

$$\begin{aligned}
u_x(0,0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(\Delta x, 0) - u(0,0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_x(0,0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(\Delta x, 0) - v(0,0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_y(0,0) &= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{u(0,\Delta y) - u(0,0)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{-\Delta y - 0}{\Delta y} \\
&= -1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_y(0,0) &= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{v(0,\Delta y) - v(0,0)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta y - 0}{\Delta y} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Vidíme že Cauchy-Riemannove rovnice sú splnené v $x = y = 0$. $f(z)$ nie je analytická v bode $z = 0$. Ukážeme to výpočtom derivácie v tom bode.

$$
f'(0) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(\Delta z)}{\Delta z}
$$

Nech $\Delta z = \Delta r\,\mathrm{e}^{\imath\theta}$, to znamená že sa blížime k počiatku pod uhlom $\theta$. Potom $x = \Delta r \cos\theta$ a $y = \Delta r \sin\theta$.

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{\Delta r\to 0} \frac{f\left(\Delta r\,\mathrm{e}^{\imath\theta}\right)}{\Delta r\,\mathrm{e}^{\imath\theta}} \\
&= \lim_{\Delta r\to 0} \frac{\frac{(1+\imath)\Delta r^3 \cos^3\theta - (1-\imath)\Delta r^3 \sin^3\theta}{\Delta r^2}}{\Delta r\,\mathrm{e}^{\imath\theta}} \\
&= \lim_{\Delta r\to 0} \frac{(1+\imath)\cos^3\theta - (1-\imath)\sin^3\theta}{\mathrm{e}^{\imath\theta}}
\end{aligned}
$$

Hodnota limity závisí od $\theta$ a nie je konštantná. Teda táto limita neexistuje. Funkcia nie je diferencovateľná v $z = 0$. Pripomeňme si že splnenie Cauchy-Riemannovych rovníc je nutnou ale nie postačujúcou podmienkou diferencovateľnosti.

**Riešenie 3.12**
Ukážeme že funkcia $\log z = \phi(r, \theta) = \operatorname{Log} r + \imath\theta$ spĺňa Cauchy-Riemannove rovnice.

$$\begin{aligned}
\phi_r &= -\frac{\imath}{r}\phi_\theta \\
\frac{1}{r} &= -\frac{\imath}{r}\imath \\
\frac{1}{r} &= \frac{1}{r}
\end{aligned}$$

Keďž logaritmus spĺňa Cauchy-Riemannove rovnice a prvé parciálne derivácie sú spojité pre $z \neq 0$, logaritmus je analytická funkcia pre $z \neq 0$. Teraz vypočítajme deriváciu.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\log z &= \mathrm{e}^{-\imath\theta}\,\frac{\partial}{\partial r}(\operatorname{Log} r + \imath\theta) \\
&= \mathrm{e}^{-\imath\theta}\,\frac{1}{r} \\
&= \frac{1}{z}
\end{aligned}$$

**Riešenie 3.13**
Komplexná derivácia v smeroch osí je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} = \mathrm{e}^{-\imath\theta}\,\frac{\partial}{\partial r} = -\frac{\imath}{r}\,\mathrm{e}^{-\imath\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

Substituujme $f = u + \imath v$ do tejto identity a dostaneme Cauchy-Riemannove rovnice v polárnych súradniciach.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\imath\theta}\,\frac{\partial f}{\partial r} &= -\frac{\imath}{r}\,\mathrm{e}^{-\imath\theta}\,\frac{\partial f}{\partial\theta} \\
\frac{\partial f}{\partial r} &= -\frac{\imath}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta} \\
u_r + \imath v_r &= -\frac{\imath}{r}\,(u_\theta + \imath v_\theta)
\end{aligned}$$

Dáme do rovnosti reálnu a imaginárnu časť.

$$\begin{aligned}
u_r &= \frac{1}{r}v_\theta, \quad v_r = -\frac{1}{r}u_\theta \\
u_r &= \frac{1}{r}v_\theta, \quad u_\theta = -r v_r
\end{aligned}$$

**Riešenie 3.14**
Keďže $w$ je analytická, $u$ a $v$ spĺňajú Cauchy-Riemannove rovnice,

$$u_x = v_y \quad \text{a} \quad u_y = -v_x.$$

Použitím pravidla derivácie zloženej funkcie môžeme napísať derivácie podľa $x$ a $y$ pomocou $u$ a $v$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= u_x \frac{\partial}{\partial u} + v_x \frac{\partial}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= u_y \frac{\partial}{\partial u} + v_y \frac{\partial}{\partial v}\end{aligned}$$

Teraz preskúmajme $\phi_x - \imath \phi_y$.

$$\begin{aligned}\phi_x - \imath \phi_y &= u_x \Phi_u + v_x \Phi_v - \imath \left( u_y \Phi_u + v_y \Phi_v \right) \\ \phi_x - \imath \phi_y &= \left( u_x - \imath u_y \right) \Phi_u + \left( v_x - \imath v_y \right) \Phi_v \\ \phi_x - \imath \phi_y &= \left( u_x - \imath u_y \right) \Phi_u - \imath \left( v_y + \imath v_x \right) \Phi_v\end{aligned}$$

Použijeme Cauchy-Riemannove rovnice na zápis $u_y$ a $v_y$ pomocou $u_x$ a $v_x$.

$$\phi_x - \imath \phi_y = \left( u_x + \imath v_x \right) \Phi_u - \imath \left( u_x + \imath v_x \right) \Phi_v$$

Pripomeňme si že $w' = u_x + \imath v_x = v_y - \imath u_y$.

$$\phi_x - \imath \phi_y = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} \left( \Phi_u - \imath \Phi_v \right)$$

Teda vidíme že,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \imath \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \left( \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} \right)^{-1} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} - \imath \frac{\partial \phi}{\partial y} \right).$$

**Riešenie 3.15**
(a) Uvažujme

$$f(z) = \log |z| + \imath \arg(z) = \log r + \imath \theta.$$

Cauchy-Riemannove rovnice v polárnych súradniciach sú

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta, \quad u_\theta = -r v_r.$$

Vypočítajme derivácie.

$$u_r = \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{r} v_\theta = \frac{1}{r}$$
$$u_\theta = 0, \quad -r v_r = 0$$

Keďže Cauchy-Riemannove rovnice sú splnené a parciálne derivácie sú spojité, $f(z)$ je analytická v $|z| > 0$, $|\arg(z)| < \pi$. Komplexná derivácia v polárnych súradniciach je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} = \mathrm{e}^{-\imath\theta} \frac{\partial}{\partial r} = -\frac{\imath}{r} \mathrm{e}^{-\imath\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

To použijeme na deriváciu $f(z)$.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \mathrm{e}^{-\imath\theta} \frac{\partial}{\partial r}[\log r + \imath\theta] = \mathrm{e}^{-\imath\theta} \frac{1}{r} = \frac{1}{z}$$

(b) ďalej uvažujme

$$f(z) = \sqrt{|z|}\, \mathrm{e}^{\imath \arg(z)/2} = \sqrt{r}\, \mathrm{e}^{\imath\theta/2}.$$

Cauchy-Riemannove rovnice pre polárne súradnice a v polárnom tvare $f(z) = R(r, \theta)\, \mathrm{e}^{\imath\Theta(r,\theta)}$ sú

$$R_r = \frac{R}{r}\Theta_\theta, \quad \frac{1}{r} R_\theta = -R\Theta_r.$$

Vypočítajme derivácie pre $R = \sqrt{r}$, $\Theta = \theta/2$.

$$R_r = \frac{1}{2\sqrt{r}}, \quad \frac{R}{r}\Theta_\theta = \frac{1}{2\sqrt{r}}$$
$$\frac{1}{r} R_\theta = 0, \quad -R\Theta_r = 0$$

Keďže Cauchy-Riemannove rovnice sú splnené a parciálne derivácie sú spojité, $f(z)$ je analytická v $|z| > 0$, $|\arg(z)| < \pi$. Komplexná derivácia v polárnych súradniciach je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} = \mathrm{e}^{-\imath\theta} \frac{\partial}{\partial r} = -\frac{\imath}{r} \mathrm{e}^{-\imath\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

To použijeme na deriváciu $f(z)$.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \mathrm{e}^{-\imath\theta} \frac{\partial}{\partial r}[\sqrt{r}\, \mathrm{e}^{\imath\theta/2}] = \frac{1}{2\, \mathrm{e}^{\imath\theta/2} \sqrt{r}} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

**Riešenie 3.16**

(a) Uvažujme funkciu

$$u = x \operatorname{Log} r - y \arctan(x, y) = r\cos\theta \operatorname{Log} r - r\theta\sin\theta$$

Vypočítajme Laplacian.

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta(r + r\operatorname{Log} r) - \theta\sin\theta\right) + \frac{1}{r^2}\left(r(\theta\sin\theta - 2\cos\theta) - r\cos\theta\operatorname{Log} r\right) \\
&= \frac{1}{r}(2\cos\theta + \cos\theta\operatorname{Log} r - \theta\sin\theta) + \frac{1}{r}(\theta\sin\theta - 2\cos\theta - \cos\theta\operatorname{Log} r) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Funkcia $u$ je harmonická. Nájdime príslušnu funkciu $v$ riešením Cauchy-Riemannovych rovníc.

$$v_r = -\frac{1}{r}u_\theta, \quad v_\theta = r u_r$$
$$v_r = \sin\theta(1 + \operatorname{Log} r) + \theta\cos\theta, \quad v_\theta = r\left(\cos\theta(1 + \operatorname{Log} r) - \theta\sin\theta\right)$$

Integrujeme prvú rovnicu podľa $r$ a určíme $v$ až na integračnú konštantu $g(\theta)$.

$$v = r(\sin\theta\operatorname{Log} r + \theta\cos\theta) + g(\theta)$$

Derivujeme tento výraz podľa $\theta$.

$$v_\theta = r\left(\cos\theta(1 + \operatorname{Log} r) - \theta\sin\theta\right) + g'(\theta)$$

Porovnáme to s druhou Cauchy-Riemannovou rovnicou a vidíme že $g'(\theta) = 0$. Teda $g(\theta) = c$. Stanovili sme $v$.

$$\boxed{v = r(\sin\theta\operatorname{Log} r + \theta\cos\theta) + c}$$

Odpovedajúca analytická funkcia je

$$f(z) = r\cos\theta\operatorname{Log} r - r\theta\sin\theta + \imath(r\sin\theta\operatorname{Log} r + r\theta\cos\theta + c).$$

(b) Uvažujme funkciu

$$u = \operatorname{Arg}(z) = \theta.$$

Vypočítajme Laplacian.

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

Funkcia $u$ je harmonická. Nájdime príslušnu funkciu $v$ riešením Cauchy-Riemannovych rovníc.

$$v_r = -\frac{1}{r}u_\theta, \quad v_\theta = r u_r$$
$$v_r = -\frac{1}{r}, \quad v_\theta = 0$$

Integrujeme prvú rovnicu podľa $r$ a určíme $v$ až na integračnú konštantu $g(\theta)$.

$$v = -\operatorname{Log} r + g(\theta)$$

Derivujeme tento výraz podľa $\theta$.

$$v_\theta = g'(\theta)$$

Porovnáme to s druhou Cauchy-Riemannovou rovnicou a vidíme že $g'(\theta) = 0$. Teda $g(\theta) = c$. Stanovili sme $v$.

$$\boxed{v = -\operatorname{Log} r + c}$$

Odpovedajúca analytická funkcia je

$$f(z) = \theta - \imath \operatorname{Log} r + \imath c$$

(c) Uvažujme funkciu

$$u = r^n \cos(n\theta)$$

Vypočítajme Laplacian.

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(n r^n \cos(n\theta)\right) - n^2 r^{n-2}\cos(n\theta) \\
&= n^2 r^{n-2}\cos(n\theta) - n^2 r^{n-2}\cos(n\theta) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Funkcia $u$ je harmonická. Nájdime príslušnu funkciu $v$ riešením Cauchy-Riemannovych rovníc.

$$v_r = -\frac{1}{r}u_\theta, \quad v_\theta = r u_r$$
$$v_r = n r^{n-1}\sin(n\theta), \quad v_\theta = n r^n \cos(n\theta)$$

Integrujeme prvú rovnicu podľa $r$ a určíme $v$ až na integračnú konštantu $g(\theta)$.

$$v = r^n \sin(n\theta) + g(\theta)$$

Derivujeme tento výraz podľa $\theta$.

$$v_\theta = nr^n \cos(n\theta) + g'(\theta)$$

Porovnáme to s druhou Cauchy-Riemannovou rovnicou a vidíme že $g'(\theta) = 0$. Teda $g(\theta) = c$. Stanovili sme $v$.

$$\boxed{v = r^n \sin(n\theta) + c}$$

Odpovedajúca analytická funkcia je

$$f(z) = r^n \cos(n\theta) + \imath r^n \sin(n\theta) + \imath c$$

(d) Uvažujme funkciu

$$u = \frac{y}{r^2} = \frac{\sin\theta}{r}$$

Vypočítajme Laplacian.

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right) - \frac{\sin\theta}{r^3} \\
&= \frac{\sin\theta}{r^3} - \frac{\sin\theta}{r^3} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Funkcia $u$ je harmonická. Nájdime príslušnu funkciu $v$ riešením Cauchy-Riemannovych rovníc.

$$v_r = -\frac{1}{r}u_\theta, \quad v_\theta = ru_r$$
$$v_r = -\frac{\cos\theta}{r^2}, \quad v_\theta = -\frac{\sin\theta}{r}$$

Integrujeme prvú rovnicu podľa $r$ a určíme $v$ až na integračnú konštantu $g(\theta)$.

$$v = \frac{\cos\theta}{r} + g(\theta)$$

Derivujeme tento výraz podľa $\theta$.

$$v_\theta = -\frac{\sin\theta}{r} + g'(\theta)$$

Porovnáme to s druhou Cauchy-Riemannovou rovnicou a vidíme že $g'(\theta) = 0$. Teda $g(\theta) = c$. Stanovili sme $v$.

$$\boxed{v = \frac{\cos\theta}{r} + c}$$

Odpovedajúca analytická funkcia je

$$f(z) = \frac{\sin\theta}{r} + \imath\frac{\cos\theta}{r} + \imath c$$

**Riešenie 3.17**

(a) Vypočítajme prvé parciálne derivácie $u = (x-y)^2$ a $v = 2(x+y)$.

$$\begin{aligned} u_x &= 2(x-y) \\ u_y &= 2(y-x) \\ v_x &= 2 \\ v_y &= 2 \end{aligned}$$

Substituujme tieto výrazy do Cauchy-Riemannovych rovníc.

$$\begin{aligned} u_x = v_y, &\quad u_y = -v_x \\ 2(x-y) = 2, &\quad 2(y-x) = -2 \\ x - y = 1, &\quad y - x = -1 \\ y &= x - 1 \end{aligned}$$

Keďže Cauchy-Riemannove rovnice sú splnené pozdĺž priamky $y = x - 1$ a parciálne derivácie sú spojité, funkcia $f(z)$ je tam diferencovateľná. Keďže funkcia nie je diferencovateľná v okolí žiadného bodu, nie je nikde analytická.

(b) Vypočítajme prvé parciálne derivácie $u$ a $v$.

$$\begin{aligned} u_x &= 2\,\mathrm{e}^{x^2-y^2}(x\cos(2xy) - y\sin(2xy)) \\ u_y &= -2\,\mathrm{e}^{x^2-y^2}(y\cos(2xy) + x\sin(2xy)) \\ v_x &= 2\,\mathrm{e}^{x^2-y^2}(y\cos(2xy) + x\sin(2xy)) \\ v_y &= 2\,\mathrm{e}^{x^2-y^2}(x\cos(2xy) - y\sin(2xy)) \end{aligned}$$

Keďže Cauchy-Riemannove rovnice, $u_x = v_y$ a $u_y = -v_x$, sú splnené všade a parciálne derivácie sú spojité, $f(z)$ je všade diferencovateľná. Keďže funkcia $f(z)$ je diferencovateľná v okolí každého bodu, je analytická v komplexnej rovine. Teraz vyhodnoťme deriváciu. Komplexná derivácia je derivácia v akomkoľvek smere. Vyberieme si smer osi $x$.

$$f'(z) = u_x + \imath v_x$$
$$f'(z) = 2\,\mathrm{e}^{x^2-y^2}(x\cos(2xy) - y\sin(2xy)) + \imath 2\,\mathrm{e}^{x^2-y^2}(y\cos(2xy) + x\sin(2xy))$$
$$f'(z) = 2\,\mathrm{e}^{x^2-y^2}((x+\imath y)\cos(2xy) + (-y+\imath x)\sin(2xy))$$

Nájdenie derivácie je ľahšie ak si najprv napíšeme $f(z)$ pomocou komplexnej premennej $z$ a použijeme komplexnú deriváciu.

$$f(z) = \mathrm{e}^{x^2-y^2}(\cos(2x,y) + \imath\sin(2xy))$$
$$f(z) = \mathrm{e}^{x^2-y^2}\,\mathrm{e}^{\imath 2xy}$$
$$f(z) = \mathrm{e}^{(x+\imath y)^2}$$
$$f(z) = \mathrm{e}^{z^2}$$
$$f'(z) = 2z\,\mathrm{e}^{z^2}$$

**Riešenie 3.18**

(a) Predpokladajme že Cauchy-Riemannove rovnice v kartézskych súradniciach

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

sú splnené a parciálne derivácie sú spojité v bode $z$. Napíšme derivácie v polárnych súradniciach pomocou derivácií v kartézskych súradniciach aby sme overili Cauchy-Riemannove rovnice v polárnych súradniciach. Najprv vypočítajme derivácie.

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$
$$w_r = \frac{\partial x}{\partial r}w_x + \frac{\partial y}{\partial r}w_y = \cos\theta w_x + \sin\theta w_y$$
$$w_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta}w_x + \frac{\partial y}{\partial \theta}w_y = -r\sin\theta w_x + r\cos\theta w_y$$

Potom overme Cauchy-Riemannove rovnice v polárnych súradniciach.

$$\begin{aligned} u_r &= \cos\theta u_x + \sin\theta u_y \\ &= \cos\theta v_y - \sin\theta v_x \\ &= \frac{1}{r}v_\theta \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r}u_\theta &= -\sin\theta u_x + \cos\theta u_y \\
&= -\sin\theta v_y - \cos\theta v_x \\
&= -v_r
\end{aligned}
$$

To dokazuje že Cauchy-Riemannove rovnice v kartézskych súradniciach platia práve vtedy ak platia Cauchy-Riemannove rovnice v polárnych súradniciach. (Za predpokladu že parciálne derivácie sú spojité.) ďalej dokážme opačné tvrdenie.

Predpokladajme že Cauchy-Riemannove rovnice v polárnych súradniciach

$$
u_r = \frac{1}{r}v_\theta, \quad \frac{1}{r}u_\theta = -v_r
$$

sú splnené a parciálne derivácie sú spojité v bode $z$. Napíšme derivácie v kartézskych súradniciach pomocou derivácií v polárnych súradniciach aby sme overili Cauchy-Riemannove rovnice v kartézskych súradniciach. Najprv vypočítajme derivácie.

$$
\begin{aligned}
r = \sqrt{x^2+y^2}&, \quad \theta = \arctan(x,y) \\
w_x = \frac{\partial r}{\partial x}w_r + \frac{\partial \theta}{\partial x}w_\theta &= \frac{x}{r}w_r - \frac{y}{r^2}w_\theta \\
w_y = \frac{\partial r}{\partial y}w_r + \frac{\partial \theta}{\partial y}w_\theta &= \frac{y}{r}w_r + \frac{x}{r^2}w_\theta
\end{aligned}
$$

Potom overme Cauchy-Riemannove rovnice v kartézskych súradniciach.

$$
\begin{aligned}
u_x &= \frac{x}{r}u_r - \frac{y}{r^2}u_\theta \\
&= \frac{x}{r^2}v_\theta + \frac{y}{r}v_r \\
&= u_y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_y &= \frac{y}{r}u_r + \frac{x}{r^2}u_\theta \\
&= \frac{y}{r^2}v_\theta - \frac{x}{r}v_r \\
&= -u_x
\end{aligned}
$$

To dokazuje že Cauchy-Riemannove rovnice v polárnych súradniciach platia práve vtedy ak platia Cauchy-Riemannove rovnice v kartézskych súradniciach. Demonštrovali sme ekvivalenciu obidvoch tvarov.

(b) Overme že $\log z$ je analytická pre $r > 0$ a $-\pi < \theta < \pi$ použitím polárneho tvaru Cauchy-Riemannovych rovníc.

$$\operatorname{Log} z = \ln r + \imath\theta$$

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta, \quad \frac{1}{r} u_\theta = -v_r$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r} 1, \quad \frac{1}{r} 0 = -0$$

Keďže Cauchy-Riemannove rovnice sú splnené a parciálne derivácie sú spojité pre $r > 0$, $\log z$ je tam analytická. Vypočítajme hodnotu derivácie použitím vzťahov pre derivovanie v polárnom tvare.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \operatorname{Log} z = \mathrm{e}^{-\imath\theta} \frac{\partial}{\partial r} (\ln r + \imath\theta) = \mathrm{e}^{-\imath\theta} \frac{1}{r} = \frac{1}{z}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \operatorname{Log} z = \frac{-\imath}{z} \frac{\partial}{\partial \theta} (\ln r + \imath\theta) = \frac{-\imath}{z} \imath = \frac{1}{z}$$

(c) Nech $\{x_i\}$ označuje pravouhlé súradnice v rovine a nech $\{\xi_i\}$ je orthogonálny súradnicový systém. *Koeficienty miery vzdialenosti* $h_i$ sú definované

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_i}\right)^2}.$$

Laplacian je

$$\nabla^2 u = \frac{1}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right) \right).$$

Najprv vypočítajme koeficienty miery vzdialenosti v polárnych súradniciach.

$$h_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

$$h_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2} = \sqrt{r^2 \sin^2\theta + r^2 \cos^2\theta} = r$$

Potom nachádzame Laplacian.

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r \phi_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \phi_\theta \right) \right)$$

V polárnych súradniciach, Laplaceova rovnica má tvar

$$\phi_{rr} + \frac{1}{r} \phi_r + \frac{1}{r^2} \phi_{\theta\theta} = 0.$$

**Riešenie 3.19**

(a) Vypočítajme Laplacian z $u(x,y) = x^3 - y^3$.

$$\nabla^2 u = 6x - 6y$$

Keďže $u$ nie je harmonická, nie je reálnou časťou analytickej funkcie.

(b) Vypočítajme Laplacian z $u(x,y) = \sinh x \cos y + x$.

$$\nabla^2 u = \sinh x \cos y - \sinh x \cos y = 0$$

Keďže $u$ je harmonická, je reálnou časťou analytickej funkcie. Určme $v$ riešením Cauchy-Riemannovych rovníc.

$$v_x = -u_y, \quad v_y = u_x$$
$$v_x = \sinh x \sin y, \quad v_y = \cosh x \cos y + 1$$

Integrujeme prvú rovnicu a určíme $v$ až na aditívnu integračnú konštantu $y$.

$$v = \cosh x \sin y + g(y)$$

Substituujme to do druhej Cauchy-Riemannovej rovnice. Týmto stanovíme $v$ až na aditívnu konštantu.

$$v_y = \cosh x \cos y + 1$$
$$\cosh x \cos y + g'(y) = \cosh x \cos y + 1$$
$$g'(y) = 1$$
$$g(y) = y + a$$
$$v = \cosh x \sin y + y + a$$
$$f(z) = \sinh x \cos y + x + \imath(\cosh x \sin y + y + a)$$

$a$ je reálna konštanta. Napíšme funkciu pomocou $z$.

$$f(z) = \sinh z + z + \imath a$$

(c) Vypočítajme Laplacian z $u(r,\theta) = r^n \cos(n\theta)$.

$$\nabla^2 u = n(n-1)r^{n-2}\cos(n\theta) + nr^{n-2}\cos(n\theta) - n^2 r^{n-2}\cos(n\theta) = 0$$

Keďže $u$ je harmonická, je reálnou časťou analytickej funkcie. Určme $v$ riešením Cauchy-Riemannovych rovníc.

$$v_r = -\frac{1}{r}u_\theta, \quad v_\theta = r u_r$$
$$v_r = nr^{n-1}\sin(n\theta), \quad v_\theta = nr^n \cos(n\theta)$$

Integrujeme prvú rovnicu a určíme $v$ až na aditívnu funkciu premennej $\theta$.

$$v = r^n \sin(n\theta) + g(\theta)$$

Substituujme to do druhej Cauchy-Riemannovej rovnice. Týmto stanovíme $v$ až na aditívnu konštantu.

$$v_\theta = nr^n \cos(n\theta)$$
$$nr^n \cos(n\theta) + g'(\theta) = nr^n \cos(n\theta)$$
$$g'(\theta) = 0$$
$$g(\theta) = a$$
$$v = r^n \sin(n\theta) + a$$
$$f(z) = r^n \cos(n\theta) + \imath(r^n \sin(n\theta) + a)$$

$a$ je tu reálna konštanta. Napíšeme funkciu pomocou $z$.

$$f(z) = z^n + \imath a$$

# Kapitola 4

# Krivkový integrál

## 4.1 Úvod

**Vyhodnotenie pomocou parametrizácie.** Nech krivka $C$ je parametrizovaná pomocou $z = z(t)$ pre $t_0 \le t \le t_1$. Potom diferenciál na krivke je $\mathrm{d}z = z'(t)\,\mathrm{d}t$ a krivkový integrál môže byť vyjadrený pomocou určitého integrálu:

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t$$

**Horné ohraničenie modulu integrálu.**

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\,|\mathrm{d}z| \le \left(\max_{z\in C}|f(z)|\right)(\text{dĺžka } C)$$

**Cauchyho teoréma.** Ak $f(z)$ je analytická v kompaktnej, uzavretej, súvislej oblasti $D$ potom integrál z $f(z)$ na hranici oblasti je nulový:

$$\oint_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_k \oint_{C_k} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

kde množina kriviek $\{C_k\}$ vytvára kladne orientovanú hranicu $\partial D$ oblasti $D$.

**Cauchyho teoréma pre Jordanove krivky (špeciálny prípad).** Ak $f(z)$ je analytická vo vnútri jednoduchej uzavretej krivky $C$ potom integrál z $f(z)$ na hranici oblasti je nulový:

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

**Nezávislosť na integračnej ceste.** Nech $f(z)$ je analytická v jednoducho súvislej oblasti. Pre body $a$ a $b$ v oblasti, krivkový integrál

$$\int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z$$

je nezávislý na ceste spájajúcej tieto body.

**Deformácia krivky.** Nech $f(z)$ je analytická v oblasti $D$. Ak množina uzavretých kriviek $\{C_m\}$ môže byť spojite deformovaná v oblasti $D$ do množiny kriviek $\{\Gamma_n\}$, potom integrály pozdĺž $\{C_m\}$ a $\{\Gamma_n\}$ sa rovnajú.

$$\int_{\{C_m\}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\{\Gamma_n\}} f(z)\,\mathrm{d}z$$

**Newton-Leibnizova formula.** Ak $f(z)$ je analytická v jednoducho súvislej oblasti $D$, potom

$$\int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z = F(b) - F(a),$$

kde $F(z)$ je akýkoľvek neurčitý integrál z $f(z)$.

## 4.2 Úlohy

**Úloha 4.1**
Nech $C$ je oblúk odpovedajúci jednotkovej polkružnici, $|z| = 1$, $\Im(z) \geq 0$, orientovanej od $z = -1$ do $z = 1$. Vyhodnoťte

(a) $\displaystyle\int_C z^2 \, \mathrm{d}z$

(b) $\displaystyle\int_C \left|z^2\right| \, \mathrm{d}z$

(c) $\displaystyle\int_C z^2 \, |\mathrm{d}z|$

(d) $\displaystyle\int_C \left|z^2\right| \, |\mathrm{d}z|$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 4.2**
Vyhodnoťte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+bx)} \, \mathrm{d}x,$$

kde $a, b \in \mathbb{C}$ a $\Re(a) > 0$. Využite fakt že

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 4.3**
Vyhodnoťte

$$2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \cos(\omega x) \, \mathrm{d}x, \quad \text{a} \quad 2\int_0^{\infty} x \, \mathrm{e}^{-ax^2} \sin(\omega x) \mathrm{d}x,$$

kde $\Re(a) > 0$ a $\omega \in \mathbb{R}$.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 4.4**
Použite povolenú parametrizáciu na vyhodnotenie

$$\int_C (z - z_0)^n \, \mathrm{d}z, \quad n \in \mathbb{Z}$$

pre nasledujúce prípady:

(a) $C$ je kružnica $|z - z_0| = 1$ obiehaná proti smeru hodinových ručičiek.

(b) $C$ je kružnica $|z - z_0 - \imath 2| = 1$ obiehaná proti smeru hodinových ručičiek.

(c) $z_0 = 0$, $n = -1$ a $C$ je uzavretá krivka definovaná polárnou rovnicou

$$r = 2 - \sin^2\left(\frac{\theta}{4}\right).$$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 4.5**
(a) Využite vlastnosti ohraničenia a ukážte že

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{z + \operatorname{Log} z}{z^3 + 1} \, \mathrm{d}z = 0,$$

kde $C_R$ je kladne orientovaná uzavretá krivka $|z| = R$.

(b) Ohraničte

$$\left| \int_C \operatorname{Log} z \, \mathrm{d}z \right|,$$

kde $C$ je oblúk na kružnici $|z| = 2$ od $-\imath 2$ do $\imath 2$.

(c) Dedukujte že

$$\left| \int_C \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} \, \mathrm{d}z \right| \leq \pi r \frac{R^2 + 1}{R^2 - 1},$$

kde $C$ je polkružnica o polomere $R > 1$ so stredom v počiatku.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 4.6**
Nech $C$ je holomorfná v celej komplexnej rovine, pozitívne orientovaná hranica polovice disku $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$ v hornej polrovine. Uvažujme vetvu

$$f(z) = \sqrt{r}\, \mathrm{e}^{\imath\theta/2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$$

mnohoznačnej funkcie $z^{1/2}$. Ukážte zvlášť parametrickým vyhodnotením polkružnice a dvoch polomerov ktoré vytvárajú hranicu že

$$\int_C f(z)\, \mathrm{d}z = 0.$$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 4.7**
Vyhodnoťte nasledujúce krivkové integrály s použitím primitívnych funkcií a pre každý odôvodnite vaš postup.

(a)

$$\int_C \left(\imath z^3 + z^{-3}\right)\, \mathrm{d}z,$$

kde $C$ je časť priamky od $z_1 = 1 + \imath$ po $z_2 = \imath$.

(b)

$$\int_C \sin^2 z \cos z\, \mathrm{d}z,$$

kde $C$ je pravotočivá špirála od $z_1 = \pi$ po $z_2 = \imath\pi$.

(c)

$$\int_C z^\imath\, \mathrm{d}z = \frac{1 + \mathrm{e}^{-\pi}}{2}(1 - \imath),$$

kde

$$z^\imath = \mathrm{e}^{\imath\, \mathrm{Log}\, z}, \quad -\pi < \mathrm{Arg}\, z < \pi.$$

$C$ spája $z_1 = -1$ a $z_2 = 1$, ležiac nad reálnou osou okrem koncových bodov. (Nápoveda: predefinujte $z^\imath$ tak aby zostala nezmenená nad reálnou osou a bola súvislo definovaná na reálnej osi.)

Nápoveda, Riešenie

## 4.3 Nápovedy

**Nápoveda 4.1**

**Nápoveda 4.2**
Nech $C$ je paralelogram v komplexnej rovine s vrcholmi v $\pm R$ a $\pm R + b/(2a)$. Uvažujte integrál z $\mathrm{e}^{-az^2}$ na tejto krivke. Vezmite limitu pre $R \to \infty$.

**Nápoveda 4.3**
Rozšírte rozsah integrácie na interval $(-\infty \ldots \infty)$. Použite $\mathrm{e}^{\imath\omega x} = \cos(\omega x) + \imath \sin(\omega x)$ a výsledok úlohy 4.2.

**Nápoveda 4.4**

**Nápoveda 4.5**

**Nápoveda 4.6**

**Nápoveda 4.7**

## 4.4 Riešenia

**Riešenie 4.1**
Parametrizujme krivku vzťahom $z = \mathrm{e}^{\imath\theta}$, s $\theta$ idúc od $\pi$ do $0$.

$$\mathrm{d}z = \imath\,\mathrm{e}^{\imath\theta}\;\mathrm{d}\theta$$
$$|\mathrm{d}z| = |\imath\,\mathrm{e}^{\imath\theta}\;\mathrm{d}\theta| = |\mathrm{d}\theta| = -\mathrm{d}\theta$$

(a)

$$\begin{aligned}
\int_C z^2\,\mathrm{d}z &= \int_\pi^0 \mathrm{e}^{\imath 2\theta}\,\imath\,\mathrm{e}^{\imath\theta}\;\mathrm{d}\theta \\
&= \int_\pi^0 \imath\,\mathrm{e}^{\imath 3\theta}\;\mathrm{d}\theta \\
&= \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{\imath 3\theta}\right]_\pi^0 \\
&= \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^{\imath 0} - \mathrm{e}^{\imath 3\pi}\right) \\
&= \frac{1}{3}(1-(-1)) \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int_C |z^2|\,\mathrm{d}z &= \int_\pi^0 |\,\mathrm{e}^{\imath 2\theta}\,|\imath\,\mathrm{e}^{\imath\theta}\;\mathrm{d}\theta \\
&= \int_\pi^0 \imath\,\mathrm{e}^{\imath\theta}\;\mathrm{d}\theta \\
&= \left[\mathrm{e}^{\imath\theta}\right]_\pi^0 \\
&= 1-(-1) \\
&= 2
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int_C z^2\,|\mathrm{d}z| &= \int_\pi^0 \mathrm{e}^{\imath 2\theta}\,|\imath\,\mathrm{e}^{\imath\theta}\ \mathrm{d}\theta| \\
&= \int_\pi^0 -\mathrm{e}^{\imath 2\theta}\ \mathrm{d}\theta \\
&= \left[\frac{\imath}{2}\,\mathrm{e}^{\imath 2\theta}\right]_\pi^0 \\
&= \frac{\imath}{2}(1-1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\int_C |z^2|\,|\mathrm{d}z| &= \int_\pi^0 |\,\mathrm{e}^{\imath 2\theta}\,||\imath\,\mathrm{e}^{\imath\theta}\ \mathrm{d}\theta| \\
&= \int_\pi^0 -\mathrm{d}\theta \\
&= [-\theta]_\pi^0 \\
&= \pi
\end{aligned}$$

**Riešenie 4.2**

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+bx)}\ \mathrm{d}x$$

Najprv doplňme do štvorca argument exponenciálnej funkcie.

$$I = \mathrm{e}^{b^2/(4a)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a(x+b/(2a))^2}\ \mathrm{d}x$$

Uvažujme paralelogram v komplexnej rovine s vrcholmi v $\pm R$ a $\pm R + b/(2a)$. Integrál $\mathrm{e}^{-az^2}$ na tejto krivke nadobúda nulovú hodnotu tak ako aj celá funkcia. Dajme do súvisu integrál pozdĺž jednej strany paralelogramu s integrálmi pozdĺž ostatných troch strán.

$$\int_{-R+b/(2a)}^{R+b/(2a)} \mathrm{e}^{-az^2}\ \mathrm{d}z = \left(\int_{-R+b/(2a)}^{-R} + \int_{-R}^{R} + \int_{R}^{R+b/(2a)}\right) \mathrm{e}^{-az^2}\ \mathrm{d}z.$$

Prvý a tretí integrál na pravej strane idú k nule pre $R \to \infty$, pretože integrand ide k nule a dĺžky kriviek po ktorých sa integruje sú konečné. Ked vezmeme limitu $R \to \infty$ dostávame,

$$\int_{-\infty+b/(2a)}^{\infty+b/(2a)} \mathrm{e}^{-az^2}\,\mathrm{d}z \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a(x+b/(2a))^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x.$$

Teraz máme

$$I = \mathrm{e}^{b^2/(4a)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x.$$

Urobíme zmenu premenných $\xi = \sqrt{a}x$.

$$I = \mathrm{e}^{b^2/(4a)} \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\xi^2}\,\mathrm{d}\xi$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+bx)}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{b^2/(4a)}}$$

**Riešenie 4.3**

Uvažujme

$$I = 2\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\cos(\omega x)\,\mathrm{d}x.$$

Keďže integrand je párnou funkciou,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\cos(\omega x)\,\mathrm{d}x.$$

Keďže $\mathrm{e}^{-ax^2}\sin(\omega x)$ je nepárnou funkciou,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{e}^{\imath\omega x}\,\mathrm{d}x.$$

Vyhodnoťme tento integrál s výsledkom úlohy 4.2.

$$\boxed{2\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\cos(\omega x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-\omega^2/(4a)}}$$

Uvažujme

$$I = 2\int_{0}^{\infty} x\,\mathrm{e}^{-ax^2}\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x.$$

Keďže integrand je párnou funkciou,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{e}^{-ax^2} \sin(\omega x)\,\mathrm{d}x.$$

Keďže $x\,\mathrm{e}^{-ax^2}\cos(\omega x)$ je nepárnou funkciou,

$$I = -\imath \int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{e}^{\imath\omega x}\,\mathrm{d}x.$$

Ešte integrujeme metódou per partes aby sme sa zbavili člena $x$.

$$I = -\imath\left[-\frac{1}{2a}\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{e}^{\imath\omega x}\right]_{-\infty}^{\infty} + \imath\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{2a}\mathrm{e}^{-ax^2}\,\imath\omega\,\mathrm{e}^{\imath\omega x}\right)\mathrm{d}x$$

$$I = \frac{\omega}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{e}^{\imath\omega x}\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{2\int_{0}^{\infty} x\,\mathrm{e}^{-ax^2}\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x = \frac{\omega}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-\omega^2/(4a)}}$$

**Riešenie 4.4**

(a) Parametrizujeme krivku a prevedieme integrovanie.

$$z - z_0 = \mathrm{e}^{\imath\theta}, \quad \theta \in [0 \dots 2\pi)$$

$$\int_C (z-z_0)^n\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\imath n\theta}\,\imath\,\mathrm{e}^{\imath\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \begin{cases}\left[\frac{\mathrm{e}^{\imath(n+1)\theta}}{n+1}\right]_0^{2\pi} & \text{pre } n \neq -1\\ [\imath\theta]_0^{2\pi} & \text{pre } n = -1\end{cases} \qquad = \begin{cases}0 & \text{pre } n \neq -1\\ \imath 2\pi & \text{pre } n = -1\end{cases}$$

(b) Parametrizujeme krivku a prevedieme integrovanie.

$$z - z_0 = \imath 2 + \mathrm{e}^{\imath\theta}, \quad \theta \in [0 \dots 2\pi)$$

$$
\begin{aligned}
\int_C (z-z_0)^n \, \mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \left(\imath 2 + \mathrm{e}^{\imath\theta}\right)^n \imath \, \mathrm{e}^{\imath\theta} \, \mathrm{d}\theta \\
&= \begin{cases} \left[\frac{\left(\imath 2+\mathrm{e}^{\imath\theta}\right)^{n+1}}{n+1}\right]_0^{2\pi} & \text{pre } n \neq -1 \\ \left[\log\left(\imath 2 + \mathrm{e}^{\imath\theta}\right)\right]_0^{2\pi} & \text{pre } n = -1 \end{cases} \qquad = 0
\end{aligned}
$$

(c) Parametrizujeme krivku a prevedieme integrovanie.

$$
z = r\,\mathrm{e}^{\imath\theta}, \quad r = 2 - \sin^2\left(\frac{\theta}{4}\right), \quad \theta \in [0 \ldots 4\pi)
$$

Krivka obieha počiatok dvakrát. Viď obr. 4.1.

$$
\begin{aligned}
\int_C z^{-1} \, \mathrm{d}z &= \int_0^{4\pi} \frac{1}{r(\theta)\,\mathrm{e}^{\imath\theta}} (r'(\theta) + \imath r(\theta))\,\mathrm{e}^{\imath\theta} \, \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{4\pi} \left(\frac{r'(\theta)}{r(\theta)} + \imath\right) \mathrm{d}\theta \\
&= [\log(r(\theta)) + \imath\theta]_0^{4\pi}
\end{aligned}
$$

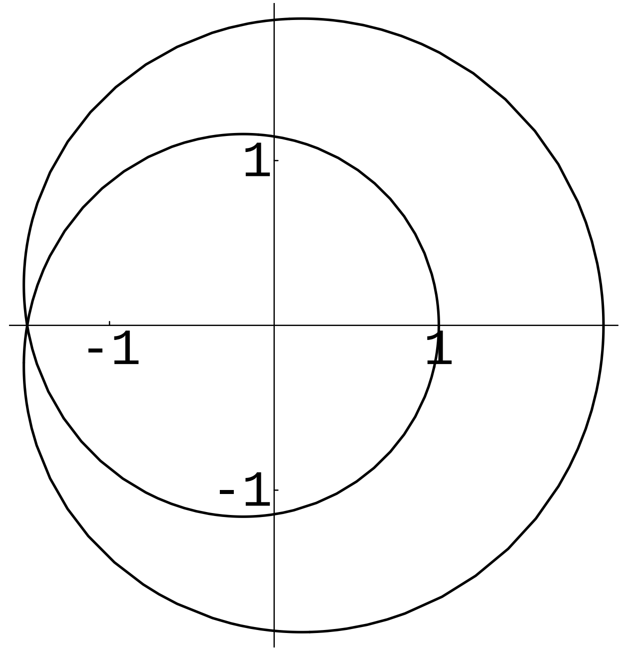
Keďže $r(\theta)$ nejde k nule, argument funkcie $r(\theta)$ sa nemení pri obiehaní krivky a teda logaritmický člen má tú istú hodnotu na začiatku aj na konci krivky.

$$
\int_C z^{-1} \, \mathrm{d}z = \imath 4\pi
$$

**Riešenie 4.5**

(a) Parametrizujeme krivku pomocou $z = R\,\mathrm{e}^{\imath\theta}$ a ohraničíme modul integrálu.

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{C_R} \frac{z + \operatorname{Log} z}{z^3+1} \, \mathrm{d}z\right| &\leq \int_{C_R} \left|\frac{z + \operatorname{Log} z}{z^3+1}\right| |\mathrm{d}z| \\
&\leq \int_0^{2\pi} \frac{R + \ln R + \pi}{R^3 - 1} R \, \mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi r \frac{R + \ln R + \pi}{R^3 - 1}
\end{aligned}
$$




Obr. 4.1: Krivka: $r = 2 - \sin^2\left(\frac{\theta}{4}\right)$.

Horná hranica modulu integrálu ide k nule pre $R \to \infty$.

$$\lim_{R\to\infty} 2\pi r \frac{R + \ln R + \pi}{R^3 - 1} = 0$$

Z toho môžeme vyvodiť že integrál ide k nule pre $R \to \infty$.

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{z + \operatorname{Log} z}{z^3 + 1}\, \mathrm{d}z = 0$$

(b) Parametrizujeme krivku a ohraničíme modul integrálu.

$$z = 2\,\mathrm{e}^{\imath\theta}, \quad \theta \in [-\pi/2 \dots \pi/2]$$

$$
\begin{aligned}
\left|\int_C \operatorname{Log} z \,\mathrm{d}z\right| &\leq \int_C |\operatorname{Log} z|\,|\mathrm{d}z| \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\ln 2 + \imath\theta| 2 \,\mathrm{d}\theta \\
&\leq 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\ln 2 + |\theta|) \,\mathrm{d}\theta \\
&= 4 \int_{0}^{\pi/2} (\ln 2 + \theta) \,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi}{2}(\pi + 4\ln 2)
\end{aligned}
$$

(c) Parametrizujeme krivku a ohraničíme modul integrálu.

$$
z = R\,\mathrm{e}^{\imath\theta}, \quad \theta \in [\theta_0 \ldots \theta_0 + \pi]
$$

$$
\begin{aligned}
\left|\int_C \frac{z^2-1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z\right| &\leq \int_C \left|\frac{z^2-1}{z^2+1}\right| |\mathrm{d}z| \\
&\leq \int_{\theta_0}^{\theta_0+\pi} \left|\frac{R^2\,\mathrm{e}^{\imath 2\theta}-1}{R^2\,\mathrm{e}^{\imath 2\theta}+1}\right| |R\,\mathrm{d}\theta| \\
&\leq R \int_{\theta_0}^{\theta_0+\pi} \frac{R^2+1}{R^2-1}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \pi r \frac{R^2+1}{R^2-1}
\end{aligned}
$$

**Riešenie 4.6**

$$
\begin{aligned}
\int_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \sqrt{r}\,\mathrm{d}r + \int_0^\pi \mathrm{e}^{\imath\theta/2}\,\imath\,\mathrm{e}^{\imath\theta}\,\mathrm{d}\theta + \int_1^0 \imath\sqrt{r}\,(-\mathrm{d}r) \\
&= \frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{3} - \imath\frac{2}{3}\right) + \imath\frac{2}{3} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

**Riešenie 4.7**

(a)

$$\int_C \left(\imath z^3 + z^{-3}\right)\,\mathrm{d}z = \left[\frac{\imath z^4}{4} - \frac{1}{2z^2}\right]_{1+\imath}^{\imath}$$
$$= \frac{1}{2} + \imath$$

V tomto príklade, primitívna funkcia je jednoznačná.

(b)

$$\int_C \sin^2 z \cos z\,\mathrm{d}z = \left[\frac{\sin^3 z}{3}\right]_{\pi}^{\imath\pi}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\sin^3(\imath\pi) - \sin^3(\pi)\right)$$
$$= -\imath\frac{\sinh^3(\pi)}{3}$$

Aj v tomto prípade, primitívna funkcia je jednoznačná.

(c) Vyberieme si vetvu $z^\imath$ s $-\pi/2 < \arg(z) < 3\pi/2$. Tá je v zhode s hlavnou hodnotou $z^\imath$ nad reálnou osou a je definovaná spojite na krivke integrovania.

$$\int_C z^\imath\,\mathrm{d}z = \left[\frac{z^{1+\imath}}{1+\imath}\right]_{\mathrm{e}^{\imath\pi}}^{\mathrm{e}^{\imath 0}}$$
$$= \left[\frac{1-\imath}{2}\,\mathrm{e}^{(1+\imath)\log z}\right]_{\mathrm{e}^{\imath\pi}}^{\mathrm{e}^{\imath 0}}$$
$$= \frac{1-\imath}{2}\left(\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{(1+\imath)\imath\pi}\right)$$
$$= \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}(1-\imath)$$

# Kapitola 5

# Cauchyho integrálny vzorec

## 5.1 Úvod

**Cauchyho integrálny vzorec.** Ak $f(\zeta)$ je analytická funkcia v kompaktnej, uzavretej, súvislej oblasti $D$ a $z$ je bod vo vnútri $D$, potom

$$f(z) = \frac{1}{\imath 2\pi} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{\imath 2\pi} \sum_k \oint_{C_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta. \tag{5.1}$$

Množina kriviek $\{C_k\}$ vytvára kladne orientovanú hranicu $\partial D$ oblasti $D$. Všeobecnejšie platí:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{\imath 2\pi} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, \mathrm{d}\zeta = \frac{n!}{\imath 2\pi} \sum_k \oint_{C_k} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, \mathrm{d}\zeta. \tag{5.2}$$

**Cauchyho nerovnosť.** Ak $f(\zeta)$ je analytická v $|\zeta - z| \leq r$, potom

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \leq \frac{n! M}{r^n},$$

kde $|f(\zeta)| \leq M$, pre všetky $|\zeta - z| = r$.

**Liouvilleova teoréma.** Ak $f(z)$ je analytická a $|f(z)|$ je ohraničená v komplexnej rovine, potom $f(z)$ je konštantná.

**Základná teoréma algebry.** Každý polynóm stupňa $n \geq 1$ má presne $n$ koreňov, počítajúc násobností.

## 5.2 Úlohy

**Úloha 5.1**
Nech $C$ je kružnica o polomere $2$ so stredom v počiatku a orientovaná v kladnom smere. Vyhodnoťte nasledujúce integrály:

(a) $\oint_C \frac{\sin z}{z^2+5}\,\mathrm{d}z$

(b) $\oint_C \frac{z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$

(c) $\oint_C \frac{z^2+1}{z}\,\mathrm{d}z$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 5.2**
Nech $f(z)$ je analytická a ohraničená (t.j. $|f(z)| < M$) pre $|z| > R$, ale nie nevyhnutne analytická pre $|z| \leq R$. Nech body $\alpha$ a $\beta$ ležia vo vnútri kružnice $|z| = R$. Vyhodnoťte

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)(z-\beta)}\,\mathrm{d}z,$$

kde $C$ je akákoľvek uzavretá krivka mimo $|z| = R$, obsahujúca kružnicu $|z| = R$. Potom predpokladajte že navyše $f(z)$ je všade analytická. Dedukujte že $f(\alpha) = f(\beta)$.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 5.3**
Vyhodnoťte ako funkciu $t$

$$\omega = \frac{1}{\imath 2\pi} \oint_C \frac{\mathrm{e}^{zt}}{z^2(z^2+a^2)}\,\mathrm{d}z,$$

kde $C$ je akákoľvek kladne orientovaná krivka okolo kružnice $|z| = a$.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 5.4**
Uvažujte $C_1$, (kladne orientovanú kružnicu $|z| = 4$), a $C_2$, (kladne orientovanú hranicu štvorca ktorého strany ležia pozdĺž priamok $x = \pm 1$, $y = \pm 1$). Vysvetlite prečo

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

pre funkcie

(a) $f(z) = \dfrac{1}{3z^2 + 1}$

(b) $f(z) = \dfrac{z}{1 - \mathrm{e}^z}$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 5.5**

Ukážte že ak $f(z)$ má tvar

$$f(z) = \frac{\alpha_k}{z^k} + \frac{\alpha_{k-1}}{z^{k-1}} + \cdots + \frac{\alpha_1}{z} + g(z), \quad k \geq 1$$

kde $g$ je analytická vo vnútri a na $C$, (kladná kružnica $|z| = 1$), potom

$$\int_C f(z) \, \mathrm{d}z = \imath 2\pi\alpha_1.$$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 5.6**

Ukážte že ak $f(z)$ je analytická vo vnútri a na jednoduchej uzavretej krivke $C$ a $z_0$ nie je na $C$ potom

$$\int_C \frac{f'(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z = \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \, \mathrm{d}z.$$

Všimnite si že $z_0$ môže byť buď vo vnútri alebo vonku krivky $C$.

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 5.7**

Ak $C$ je kladná kružnica $z = \mathrm{e}^{\imath\theta}$, ukážte že pre ľubovoľnú reálnu konštantu $a$,

$$\int_C \frac{\mathrm{e}^{az}}{z} \, \mathrm{d}z = \imath 2\pi$$

a teda

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{a \cos\theta} \cos(a \sin\theta) \, \mathrm{d}\theta = \pi.$$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 5.8**
Použite Cauchyho teorému a vhodné rozšírenia viacnásobne súvislých oblastí a vyhodnoťte nasledujúce integrály. V každom prípade odôvodnite svoj prístup.

(a)
$$\int_C \frac{z}{z^3-9}\,\mathrm{d}z,$$
kde $C$ je kladne orientovaný obdĺžnik ktorého strany ležia pozdĺž $x = \pm 5$, $y = \pm 3$.

(b)
$$\int_C \frac{\sin z}{z^2(z-4)}\,\mathrm{d}z,$$
kde $C$ je kladne orientovaná kružnica $|z| = 2$.

(c)
$$\int_C \frac{(z^3+z+\imath)\sin z}{z^4+\imath z^3}\,\mathrm{d}z,$$
kde $C$ je kladne orientovaná kružnica $|z| = \pi$.

(d)
$$\int_C \frac{\mathrm{e}^{zt}}{z^2(z+1)}\,\mathrm{d}z,$$
kde $C$ je ľubovoľná jednoduchá uzavretá krivka okolo $|z| = 1$.

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 5.9**
Použite Liouvilleovu teorému a dokážte následovné:

(a) Ak $f(z)$ je holomorfná v celej komplexnej rovine s $\Re(f(z)) \leq M$ pre všetky $z$ potom $f(z)$ je konštantná.

(b) Ak $f(z)$ je holomorfná v celej komplexnej rovine s $|f^{(5)}(z)| \leq M$ pre všetky $z$ potom $f(z)$ je polynóm stupňa nanajvýš 5.

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 5.10**
Nájdite všetky funkcie $f(z)$ analytické v oblasti $D : |z| < R$ ktoré spĺňajú $f(0) = \mathrm{e}^{\imath}$ a $|f(z)| \leq 1$ pre všetky $z$ v $D$.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 5.11**

Nech $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k^4 \left(\frac{z}{4}\right)^k$. Vyhodnoťte nasledujúce krivkové integrály, s odôvodnením postupu v každom prípade:

(a) $\displaystyle\int_C \cos(\imath z) f(z)\,\mathrm{d}z,$ kde $C$ je kladná kružnica $|z-1| = 1$.

(b) $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z^3}\,\mathrm{d}z,$ kde $C$ je kladná kružnica $|z| = \pi$.

Nápoveda, Riešenie

## 5.3 Nápovedy

**Nápoveda 5.1**

**Nápoveda 5.2**
Pre vyhodnotenie integrálu, uvažujte kružnicu v nekonečne.

**Nápoveda 5.3**

**Nápoveda 5.4**

**Nápoveda 5.5**

**Nápoveda 5.6**

**Nápoveda 5.7**

**Nápoveda 5.8**

**Nápoveda 5.9**

**Nápoveda 5.10**

**Nápoveda 5.11**

## 5.4 Riešenia

**Riešenie 5.1**

(a) Keďže integrand $\frac{\sin z}{z^2+5}$ je analytická funkcia vo vnútri a na krivke, (jediné singularity sú v $z = \pm\imath\sqrt{5}$ a nekonečne), integrál je podľa Cauchyho teorémy nulový.

(b) Nejprv rozložme integrand na parciálne zlomly.

$$\frac{z}{z^2+1} = \frac{a}{z-\imath} + \frac{b}{z+\imath}$$

$$a = \left.\frac{z}{z+\imath}\right|_{z=\imath} = \frac{1}{2}, \qquad b = \left.\frac{z}{z-\imath}\right|_{z=-\imath} = \frac{1}{2}$$

Teraz môžeme integrovať s použitím Cauchyho vzorca.

$$\begin{aligned}\int_C \frac{z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z &= \int_C \frac{1/2}{z-\imath}\,\mathrm{d}z + \int_C \frac{1/2}{z+\imath}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\imath 2\pi + \frac{1}{2}\imath 2\pi \\ &= \imath 2\pi\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int_C \frac{z^2+1}{z}\,\mathrm{d}z &= \int_C \left(z + \frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z \\ &= \int_C z\,\mathrm{d}z + \int_C \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \\ &= 0 + \imath 2\pi \\ &= \imath 2\pi\end{aligned}$$

**Riešenie 5.2**

Nech $C$ je kružnica o polomere $r$, $(r > R)$, so stredom v počiatku. Hornú hranicu integrálu dostaneme pomocou horného ohraničenia modulu integrálu, (Výsledok 4.1).

$$\left|\oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)(z-\beta)}\,\mathrm{d}z\right| \leq 2\pi r \max_{|z|=r}\left|\frac{f(z)}{(z-\alpha)(z-\beta)}\right| \leq 2\pi r \frac{M}{(r-|\alpha|)(r-|\beta|)}$$

Ak vezmeme limitu pre $r \to \infty$ vidíme že modul integrálu je zhora ohraničený nulou. Teda integrál nadobúda nulovú hodnotu.

Teraz predpokladajme že $f(z)$ je analytická a vyhodnoťme integrál pomocou Cauchyho integrálneho vzorca. (Predpokladáme že $\alpha \neq \beta$.)

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)(z-\beta)}\,\mathrm{d}z = 0$$
$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)(\alpha-\beta)}\,\mathrm{d}z + \oint_C \frac{f(z)}{(\beta-\alpha)(z-\beta)}\,\mathrm{d}z = 0$$
$$\imath 2\pi \frac{f(\alpha)}{\alpha-\beta} + \imath 2\pi \frac{f(\beta)}{\beta-\alpha} = 0$$
$$f(\alpha) = f(\beta)$$

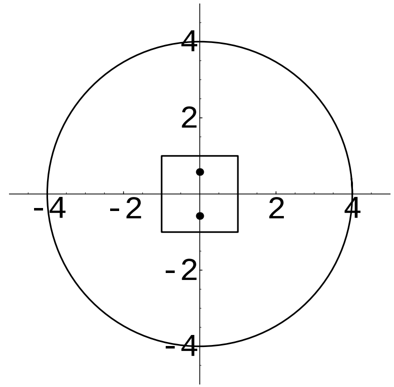
**Riešenie 5.3**
Vyhodnoťme integrál pomocou Cauchyho integrálneho vzorca.

$$\omega = \frac{1}{\imath 2\pi} \oint_C \frac{\mathrm{e}^{zt}}{z^2(z^2+a^2)}\,\mathrm{d}z$$
$$\omega = \frac{1}{\imath 2\pi} \oint_C \left( \frac{\mathrm{e}^{zt}}{a^2 z^2} + \frac{\imath\,\mathrm{e}^{zt}}{2a^3(z-\imath a)} - \frac{\imath\,\mathrm{e}^{zt}}{2a^3(z+\imath a)} \right) \mathrm{d}z$$
$$\omega = \left[ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{e}^{zt}}{a^2} \right]_{z=0} + \frac{\imath\,\mathrm{e}^{\imath a t}}{2a^3} - \frac{\imath\,\mathrm{e}^{-\imath a t}}{2a^3}$$
$$\omega = \frac{t}{a^2} - \frac{\sin(at)}{a^3}$$
$$\boxed{\omega = \frac{at - \sin(at)}{a^3}}$$

**Riešenie 5.4**
(a) Rozložme si menovateľ integrandu.

$$\frac{1}{3z^2+1} = \frac{1}{3(z-\imath\sqrt{3}/3)(z+\imath\sqrt{3}/3)}$$

Existujú dva jednoduché póly ktoré by mohli prispieť k hodnote integrálu na uzavretej krivke. Obidva póly ležia vo vnútri obidvoch kriviek. Viď obr. 5.1. Vidíme že $C_1$ môže byť spojite deformovaná na $C_2$ v oblasti kde integrand je analytický. Teda integrály majú rovnakú hodnotu.




Obr. 5.1: Krivky a singularity pre $\frac{1}{3z^2+1}$.

(b) Uvažujme integrand

$$\frac{z}{1-\mathrm{e}^z}.$$

Keďže $\mathrm{e}^z = 1$ má dve riešenia $z = \imath 2\pi n$ pre $n \in \mathbb{Z}$, integrand má singularity v týchto bodoch. Existuje odstrániteľná singularita v $z = 0$ a jednoduché póly v $z = \imath 2\pi n$ pre $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Každá krivka obsahuje len singularitu v $z = 0$. Viď obr. 5.2. Vidíme že $C_1$ môže byť spojite deformovaná na $C_2$ v oblasti kde integrand je analytický. Teda integrály majú rovnakú hodnotu.

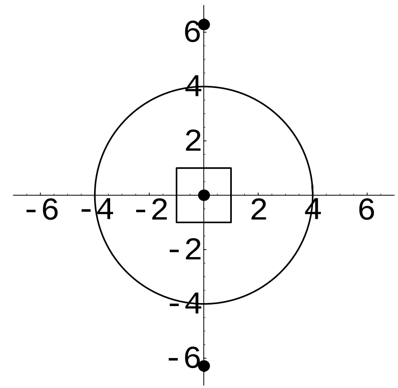
**Riešenie 5.5**

Najprv napíšeme integrál z $f(z)$ ako sumu integrálov.

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_C \left(\frac{\alpha_k}{z^k} + \frac{\alpha_{k-1}}{z^{k-1}} + \cdots + \frac{\alpha_1}{z} + g(z)\right)\mathrm{d}z \\
&= \int_C \frac{\alpha_k}{z^k}\,\mathrm{d}z + \int_C \frac{\alpha_{k-1}}{z^{k-1}}\,\mathrm{d}z + \cdots + \int_C \frac{\alpha_1}{z}\,\mathrm{d}z + \int_C g(z)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Integrál z $g(z)$ nadobúda nulovú hodnotu podľa Cauchyho teorémy. Vyhodnoťme integrál z $\alpha_1/z$ pomocou Cauchyho integrálneho vzorca.

$$\int_C \frac{\alpha_1}{z}\,\mathrm{d}z = \imath 2\pi\alpha_1$$




Obr. 5.2: Krivky a singularity pre $\frac{z}{1-e^z}$.

Vyhodnoťme zostávajúce členy $\alpha_n/z^n$ pomocou primitívnych funkcií. Každý z týchto integrálov nadobúda nulovú hodnotu.

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_C \frac{\alpha_k}{z^k}\,\mathrm{d}z + \int_C \frac{\alpha_{k-1}}{z^{k-1}}\,\mathrm{d}z + \cdots + \int_C \frac{\alpha_1}{z}\,\mathrm{d}z + \int_C g(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \left[-\frac{\alpha_k}{(k-1)z^{k-1}}\right]_C + \cdots + \left[-\frac{\alpha_2}{z}\right]_C + \imath 2\pi\alpha_1 \\ &= \imath 2\pi\alpha_1\end{aligned}$$

**Riešenie 5.6**
Vyhodnoťme integrály pomocou Cauchyho integrálneho vzorca. (Od $z_0$ sa výžaduje aby neležal na $C$ aby integrály existovali.)

$$\int_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} \imath 2\pi f'(z_0) & \text{ak } z_0 \text{ je vo vnútri } C \\ 0 & \text{ak } z_0 \text{ je zvonku } C \end{cases}$$

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} \frac{\imath 2\pi}{1!} f'(z_0) & \text{ak } z_0 \text{ je vo vnútri } C \\ 0 & \text{ak } z_0 \text{ je zvonku } C \end{cases}$$

Teda vidíme že integrály sa rovnajú.

**Riešenie 5.7**
Najprv vyhodnoťme integrál pomocou Cauchyho integrálneho vzorca.

$$\int_C \frac{\mathrm{e}^{az}}{z}\,\mathrm{d}z = \left[\mathrm{e}^{az}\right]_{z=0} = \imath 2\pi$$

ďalej parametrizujme cestu integrovania. Použijeme periodicitu kosínu a sínu na zjednodušenie integrálu.

$$\begin{gathered}
\int_C \frac{\mathrm{e}^{az}}{z}\,\mathrm{d}z = \imath 2\pi \\
\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{a\,\mathrm{e}^{\imath\theta}}}{\mathrm{e}^{\imath\theta}}\imath\,\mathrm{e}^{\imath\theta}\,\mathrm{d}\theta = \imath 2\pi \\
\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{a(\cos\theta + \imath\sin\theta)}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi \\
\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{a\cos\theta}(\cos(\sin\theta) + \imath\sin(\sin\theta))\,\mathrm{d}\theta = 2\pi \\
\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{a\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi \\
\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{a\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \pi
\end{gathered}$$

**Riešenie 5.8**
(a) Rozložme si integrand a vidíme že sú tam singularity v koreňoch tretej odmocniny z $9$.

$$\frac{z}{z^3-9} = \frac{z}{\left(z-\sqrt[3]{9}\right)\left(z-\sqrt[3]{9}\,\mathrm{e}^{\imath 2\pi/3}\right)\left(z-\sqrt[3]{9}\,\mathrm{e}^{-\imath 2\pi/3}\right)}$$

Nech $C_1$, $C_2$ a $C_3$ sú krivky okolo $z = \sqrt[3]{9}$, $z = \sqrt[3]{9}\,\mathrm{e}^{\imath 2\pi/3}$ a $z = \sqrt[3]{9}\,\mathrm{e}^{-\imath 2\pi/3}$. Viď obr. 5.3. Nech $D$ je oblasť medzi $C$, $C_1$ a $C_2$, t.j. hranica $D$ je zjednotením $C$, $-C_1$ a $-C_2$. Keďže integrand je analytický na $D$, integrál pozdĺž hranice $D$ nadobúda nulovú hodnotu.

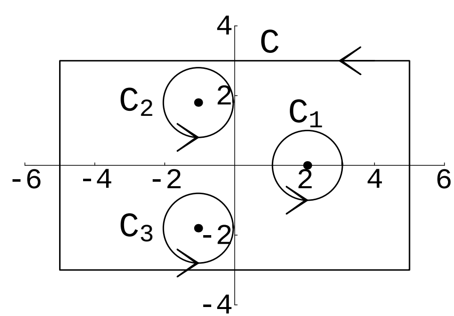
$$\int_{\partial D} \frac{z}{z^3-9}\,\mathrm{d}z = \int_C \frac{z}{z^3-9}\,\mathrm{d}z + \int_{-C_1} \frac{z}{z^3-9}\,\mathrm{d}z + \int_{-C_2} \frac{z}{z^3-9}\,\mathrm{d}z + \int_{-C_3} \frac{z}{z^3-9}\,\mathrm{d}z = 0$$

Z toho vidíme že integrál pozdĺž $C$ je rovný sume integrálov pozdĺž $C_1$, $C_2$ a $C_3$. (Tiež to môžeme vidieť deformovaním $C$ do $C_1$, $C_2$ a $C_3$.)

$$\int_C \frac{z}{z^3-9}\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} \frac{z}{z^3-9}\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} \frac{z}{z^3-9}\,\mathrm{d}z + \int_{C_3} \frac{z}{z^3-9}\,\mathrm{d}z$$

Na vyhodnotenie integrálov pozdĺž $C_1$, $C_2$ a $C_3$ použijeme Cauchyho integrálny vzorec.

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{z}{z^3-9}\,\mathrm{d}z &= \int_{C_1} \frac{z}{\left(z-\sqrt[3]{9}\right)\left(z-\sqrt[3]{9}\,\mathrm{e}^{\imath 2\pi/3}\right)\left(z-\sqrt[3]{9}\,\mathrm{e}^{-\imath 2\pi/3}\right)}\,\mathrm{d}z \\
&\quad + \int_{C_2} \frac{z}{\left(z-\sqrt[3]{9}\right)\left(z-\sqrt[3]{9}\,\mathrm{e}^{\imath 2\pi/3}\right)\left(z-\sqrt[3]{9}\,\mathrm{e}^{-\imath 2\pi/3}\right)}\,\mathrm{d}z \\
&\quad + \int_{C_3} \frac{z}{\left(z-\sqrt[3]{9}\right)\left(z-\sqrt[3]{9}\,\mathrm{e}^{\imath 2\pi/3}\right)\left(z-\sqrt[3]{9}\,\mathrm{e}^{-\imath 2\pi/3}\right)}\,\mathrm{d}z \\
&= \imath 2\pi \left[\frac{z}{\left(z-\sqrt[3]{9}\,\mathrm{e}^{\imath 2\pi/3}\right)\left(z-\sqrt[3]{9}\,\mathrm{e}^{-\imath 2\pi/3}\right)}\right]_{z=\sqrt[3]{9}} \\
&\quad + \imath 2\pi \left[\frac{z}{\left(z-\sqrt[3]{9}\right)\left(z-\sqrt[3]{9}\,\mathrm{e}^{-\imath 2\pi/3}\right)}\right]_{z=\sqrt[3]{9}\,\mathrm{e}^{\imath 2\pi/3}} \\
&\quad + \imath 2\pi \left[\frac{z}{\left(z-\sqrt[3]{9}\right)\left(z-\sqrt[3]{9}\,\mathrm{e}^{\imath 2\pi/3}\right)}\right]_{z=\sqrt[3]{9}\,\mathrm{e}^{-\imath 2\pi/3}} \\
&= \imath 2\pi 3^{-5/3}\left(1-\mathrm{e}^{\imath\pi/3}+\mathrm{e}^{\imath 2\pi/3}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$




Obr. 5.3: Krivky pre $\frac{z}{z^3-9}$.

(b) Integrand má singularity v $z = 0$ a $z = 4$. Len singularita v $z = 0$ leží vo vnútri krivky. Použijeme Cauchyho integrálny vzorec na vyhodnotenie integrálu.

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{\sin z}{z^2(z-4)}\,\mathrm{d}z &= \imath 2\pi \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\sin z}{z-4}\right]_{z=0} \\
&= \imath 2\pi \left[\frac{\cos z}{z-4} - \frac{\sin z}{(z-4)^2}\right]_{z=0} \\
&= -\frac{\imath\pi}{2}
\end{aligned}$$

(c) Rozložme si integrand a vidíme že sú tam singularity v $z = 0$ a $z = -\imath$.

$$\int_C \frac{(z^3+z+\imath)\sin z}{z^4+\imath z^3}\,\mathrm{d}z = \int_C \frac{(z^3+z+\imath)\sin z}{z^3(z+\imath)}\,\mathrm{d}z$$

Nech $C_1$ a $C_2$ sú krivky okolo $z = 0$ a $z = -\imath$. Viď obr. 5.4. Nech $D$ je oblasť medzi $C$, $C_1$ a $C_2$, t.j. hranica $D$ je zjednotením $C$, $-C_1$ a $-C_2$. Keďže integrand je analytický na $D$, integrál pozdĺž hranice $D$ nadobúda nulovú hodnotu.

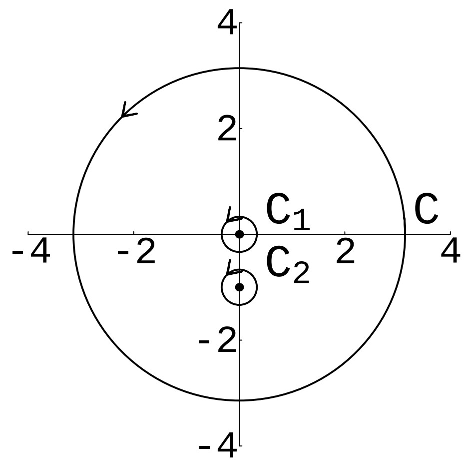
$$\int_{\partial D} = \int_C + \int_{-C_1} + \int_{-C_2} = 0$$

Z toho vidíme že integrál pozdĺž $C$ je rovný sume integrálov pozdĺž $C_1$ a $C_2$. (Tiež to môžeme vidieť deformovaním $C$ do $C_1$ a $C_2$.)

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2}$$

Použijeme Cauchyho integrálny vzorec na vyhodnotenie integrálov pozdĺž $C_1$ a $C_2$.

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{(z^3+z+\imath)\sin z}{z^4+\imath z^3}\,\mathrm{d}z &= \int_{C_1} \frac{(z^3+z+\imath)\sin z}{z^3(z+\imath)}\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} \frac{(z^3+z+\imath)\sin z}{z^3(z+\imath)}\,\mathrm{d}z \\
&= \imath 2\pi \left[\frac{(z^3+z+\imath)\sin z}{z^3}\right]_{z=-\imath} + \frac{\imath 2\pi}{2!}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{(z^3+z+\imath)\sin z}{z+\imath}\right]_{z=0} \\
&= \imath 2\pi(-\imath\sinh(1)) + \imath\pi\Bigg[2\left(\frac{3z^2+1}{z+\imath} - \frac{z^3+z+\imath}{(z+\imath)^2}\right)\cos z \\
&\quad + \left(\frac{6z}{z+\imath} - \frac{2(3z^2+1)}{(z+\imath)^2} + \frac{2(z^3+z+\imath)}{(z+\imath)^3} - \frac{z^3+z+\imath}{z+\imath}\right)\sin z\Bigg]_{z=0} \\
&= 2\pi\sinh(1)
\end{aligned}$$




Obr. 5.4: Krivky pre $\frac{(z^3+z+\imath)\sin z}{z^4+\imath z^3}$.

(d) Uvažujme integrál

$$\int_C \frac{\mathrm{e}^{zt}}{z^2(z+1)}\,\mathrm{d}z.$$

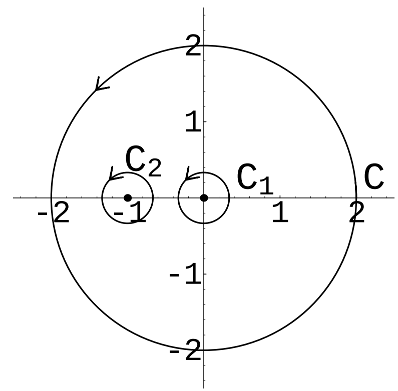
Singularity sú v $z=0$ a $z=-1$.

Nech $C_1$ a $C_2$ sú krivky okolo $z=0$ a $z=-1$. Viď obr. 5.5. Deformujme $C$ do $C_1$ a $C_2$.

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2}$$

Použijeme Cauchyho integrálny vzorec na vyhodnotenie integrálov pozdĺž $C_1$ a $C_2$.

$$
\begin{aligned}
\int_C \frac{\mathrm{e}^{zt}}{z^2(z+1)}\,\mathrm{d}z &= \int_{C_1} \frac{\mathrm{e}^{zt}}{z^2(z+1)}\,\mathrm{d}z + \int_{C_1} \frac{\mathrm{e}^{zt}}{z^2(z+1)}\,\mathrm{d}z \\
&= \imath 2\pi \left[\frac{\mathrm{e}^{zt}}{z^2}\right]_{z=-1} + \imath 2\pi \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{e}^{zt}}{(z+1)}\right]_{z=0} \\
&= \imath 2\pi\,\mathrm{e}^{-t} + \imath 2\pi \left[\frac{t\,\mathrm{e}^{zt}}{(z+1)} - \frac{\mathrm{e}^{zt}}{(z+1)^2}\right]_{z=0} \\
&= \imath 2\pi(\mathrm{e}^{-t} + t - 1)
\end{aligned}
$$




Obr. 5.5: Krivky pre $\frac{\mathrm{e}^{zt}}{z^2(z+1)}$.

**Riešenie 5.9**

Liouvilleova teoréma hovorí že ak $f(z)$ je analytická a ohraničená v komplexnej rovine potom $f(z)$ je konštantná.

(a) Keďže $f(z)$ je analytická, $\mathrm{e}^{f(z)}$ je analytická. Modul $\mathrm{e}^{f(z)}$ je ohraničený.

$$\left|\mathrm{e}^{f(z)}\right| = \mathrm{e}^{\Re(f(z))} \leq \mathrm{e}^{M}$$

Z Liouvilleovej teorémy vyplýva že $\mathrm{e}^{f(z)}$ je konštantná a teda $f(z)$ je konštantná.

(b) Vieme že $f(z)$ je holomorfná v celej komplexnej rovine a $|f^{(5)}(z)|$ je ohraničená v komplexnej rovine. Keďže $f(z)$ je analytická, aj $f^{(5)}(z)$ je analytická. Aplikujeme Liouvilleovu teorému na $f^{(5)}(z)$ a zistíme že je konštanta. Potom integrujeme aby sme určili tvar $f(z)$.

$$f(z) = c_5 z^5 + c_4 z^4 + c_3 z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0$$

$c_5$ tu predstavuje hodnotu $f^{(5)}(z)$ a výrazy od $c_4$ po $c_0$ sú integračné konštanty. Vidíme že $f(z)$ je polynóm stupňa najviac 5.

**Riešenie 5.10**
Pre tento problém použijeme teorému horného ohraničenia modulu: Nech $f(z)$ je analytická v uzavretej, súvislej oblasti, $D$. Extrémne hodnoty modulu funkcie musia nastať na hranici. Ak $|f(z)|$ má extrémy vo vnútri, potom funkcia je konštanta.

Keďže $|f(z)|$ má extrémy vo vnútri, $|f(0)| = |\,\mathrm{e}^{\imath}\,| = 1$, $f(z)$ je konštanta v $D$. Keďže poznáme hodnotu v $z = 0$, vieme že $f(z) = \mathrm{e}^{\imath}$.

**Riešenie 5.11**
Najprv určíme polomer konvergencie radu pomocou následovného testu pomeru.

$$\begin{aligned} R &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k^4/4^k}{(k+1)^4/4^{k+1}} \right| \\ &= 4 \lim_{k\to\infty} \frac{k^4}{(k+1)^4} \\ &= 4 \lim_{k\to\infty} \frac{24}{24} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Rad konverguje absolútne pre $|z| < 4$.

(a) Keďže integrand je analytický vo vnútri a na krivke integrovania, podľa Cauchyho teorémy integrál nadobúda nulovú hodnotu.

(b)

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{f(z)}{z^3}\,\mathrm{d}z &= \int_C \sum_{k=0}^{\infty} k^4 \left(\frac{z}{4}\right)^k \frac{1}{z^3}\,\mathrm{d}z \\
&= \int_C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{4^k} z^{k-3}\,\mathrm{d}z \\
&= \int_C \sum_{k=-2}^{\infty} \frac{(k+3)^4}{4^{k+3}} z^{k}\,\mathrm{d}z \\
&= \int_C \frac{1}{4z^2}\,\mathrm{d}z + \int_C \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z + \int_C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+3)^4}{4^{k+3}} z^{k}\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Môžeme parametrizovať prvý integrál aby sme ukázali že nadobúda nulovú hodnotu. Druhý integrál má podľa Cauchyho teorémy hodnotu $\imath 2\pi$. Tretí integrál podľa Cauchyho teorémy nadobúda nulovú hodnotu, keďže integrand je analytický vo vnútri a na krivke.

$$\int_C \frac{f(z)}{z^3}\,\mathrm{d}z = \imath 2\pi$$

# Kapitola 6

# Rady a konvergencia

## 6.1 Úvod

### 6.1.1 Definície

**Konvergencia postupnosti.** Nekonečná postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \equiv a_0, a_1, a_2, \ldots$ konverguje ak

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

pre nejakú konštantu $a$. Ak limita neexistuje, potom postupnosť diverguje.

**Konvergencia radu.** Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje ak postupnosť *čiastočných súčtov*, $S_N = \sum_{n=0}^{N-1} a_n$, konverguje. To znamená,

$$\lim_{N \to \infty} S_N = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N-1} a_n = \text{konštanta}.$$

Ak limita neexistuje, potom rad diverguje. Nutná podmienka konvergencie radu je aby

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

**Absolútna konvergencia.** Rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje absolútne ak $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Absolútna konvergencia znamená konvergenciu.

### 6.1.2 Špeciálne rady

**Geometrický rad.** Jeden z najdôležitejších radov v matematike je *geometrický rad*,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots .$$

Rad konverguje pre $|z| < 1$ a diverguje pre $|z| \geq 1$.

**Harmonický rad.** ďalší dôležitý rad je *harmonický rad*,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots .$$

Rad je absolútne konvergentný pre $\Re(\alpha) > 1$ a absolútne divergentný pre $\Re(\alpha) \leq 1$. *Alternujúci harmonický rad* je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha} = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \cdots .$$

Znova, rad je absolútne konvergentný pre $\Re(\alpha) > 1$ a absolútne divergentný pre $\Re(\alpha) \leq 1$.

### 6.1.3 Kritéria konvergencie

**Porovnávacie kritérium.**

Rad s kladnými členmi $\sum a_n$ konverguje ak existuje konvergentný rad $\sum b_n$ taký že $a_n \leq b_n$ pre všetky $n$. Podobne, $\sum a_n$ diverguje ak existuje divergentný rad $\sum b_n$ taký že $a_n \geq b_n$ pre všetky $n$.

**D'Alembertovo (podielové) kritérium.**

Rad $\sum a_n$ konverguje absolútne ak

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1.$$

Ak limita je vačšia ako jedna, potom rad diverguje. Ak je limita rovná jednej, potom kritérium nie je použiteľné.

**Cauchyho (odmocninové) kritérium.**

Rad $\sum a_n$ konverguje absolútne ak

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} < 1.$$

Ak je limita vačšia ako jedna, potom rad diverguje. Ak je limita rovná jednej, potom kritérium nie je použiteľné.

### 6.1.4 Rovnomerná konvergencia

**Konvergencia.** Uvažujme rad v ktorom všetky členy sú funkcie premennej $z$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)$. Rad je konvergentný v oblasti ak rak konverguje pre každý bod $z$ v oblasti. Potom môžeme definovať funkciu $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)$. Potom kritérium konvergencie môžeme formulovať ako: Pre ľubovoľné dane $\epsilon > 0$ existuje funkcia $N(z)$ taká že

$$|f(z) - S_{N(z)}(z)| = \left| f(z) - \sum_{n=0}^{N(z)-1} a_n(z) \right| < \epsilon$$

pre všetky $z$ v oblasti.

**Rovnomerná konvergencia.** Uvažujme rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)$ ktorý je konvergentný na nejakej oblasti. Ak miera konvergencie je nezávislá od $z$, potom hovoríme že rad konverguje rovnomerne. Viac matematicky, rad je rovnomerne konvergentný v oblasti ak pre ľubovoľné dane $\epsilon > 0$ existuje také $N$, nezávislé od $z$, že

$$|f(z) - S_N(z)| = \left| f(z) - \sum_{n=1}^{N} a_n(z) \right| < \epsilon$$

pre všetky $z$ v oblasti.

### 6.1.5 Kritéria rovnomernej konvergencie

**Weierstrassovo kritérium.** Rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)$ je rovnomerne a absolútne konvergentný v oblasti ak existuje konvergentný rad kladných členov $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ taký že $|a_n(z)| \leq M_n$ pre všetky $z$ v oblasti.

**Dirichletovo kritérium.** Uvažujme postupnosť monotónne klesajúcich kladných konštánt $c_n$ s limitou v nule. Ak čiastočné sumy $a_n(z)$ sú ohraničené na nejakej uzavretej oblasti, t. j.

$$\left| \sum_{n=1}^{N} a_n(z) \right| < \text{konštanta}$$

pre všetky $N$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n(z)$ je rovnomerne konvergentný na tejto uzavretej oblasti.

### 6.1.6 Rovnomerne konvergentný mocninový rad

**Mocninový rad.** Mocninové rady sú rady tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

**Oblasť a polomer konvergencie mocninového radu.** Oblasť konvergencie mocninového radu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

je kruh v komplexnej rovine s polomerom

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

keď limita existuje.

**Cauchy-Hadamardov vzorec.** Polomer konvergencie mocninového radu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

je

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

**Absolútna konvergencia mocninového radu.** Ak mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konverguje pre $z = z_0$, potom rad konverguje absolútne pre $|z| < |z_0|$.

**Rovnomerná konvergencia mocninového radu.** Ak mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konverguje pre $|z| < r_0$, potom rad konverguje rovnomerne pre $|z| \leq r < r_0$.

**Analytickosť mocninového radu.** Mocninový rad je analytický v oblasti kde je rovnomerne konvergentný.

**Derivácia mocninového radu.** Ak $C$ je krivka ležiaca v oblasti rovnomernej konvergencie mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, potom

$$\int_C \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \, \mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C z^n \, \mathrm{d}z.$$

**Integrácia mocninového radu.** Mocninový rad môžeme derivovať v oblasti jeho rovnomernej konvergencie a platí:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n.$$

### 6.1.7 Taylorov rad

**Taylorova teoréma.** Nech $f(z)$ je funkcia ktorá je jednoznačná a analytická v $|z - z_0| < R$. Pre všetky $z$ v tomto otvorenom disku, $f(z)$ má konvergentný Taylorov rozvoj

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n. \tag{6.1}$$

Tiež to môžeme písať ako

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{\imath 2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z, \tag{6.2}$$

kde $C$ je jednoduchá, kladná, uzavretá krivka v $0 < |z - z_0| < R$, ktorá raz obieha bod $z_0$.

**Newtonov binomický vzorec.** Pre všetky $|z| < 1$, $a$ komplexné platí:

$$(1 + z)^a = 1 + \binom{a}{1} z + \binom{a}{2} z^2 + \binom{a}{3} z^3 + \cdots$$

kde

$$\binom{a}{r} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-r+1)}{r!}.$$

Ak $a$ je komplexné, potom rozvoj je rozvojom hlavnej vetvy $(1+z)^a$. Definujeme

$$\binom{r}{0} = 1, \quad \binom{0}{r} = 0, \quad \text{pre } r \neq 0, \qquad \binom{0}{0} = 1.$$

### 6.1.8 Laurentov rad

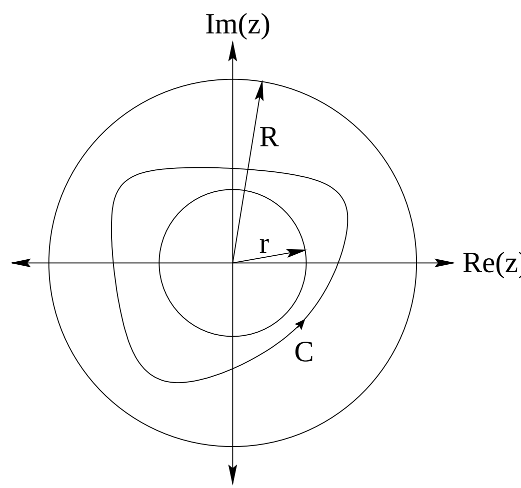
Nech $f(z)$ je jednoznačná a analytická funkcia v prstenci $R_1 < |z - z_0| < R_2$. Pre body v prstenci, funkcia má konvergentný Laurentov rozvoj

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n,$$

kde

$$a_n = \frac{1}{\imath 2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z$$

a $C$ je kladne orientovaná, uzavretá krivka okolo $z_0$ ležiaca v prstenci. Integračná cesta je znázornená na obr. 6.1.




Obr. 6.1: Integračná cesta.

## 6.2 Úlohy

**Úloha 6.1**

Ukážte že ak $\sum a_n$ konverguje potom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. To znamená, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ je nutnou podmienkou konvergencie radu.

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 6.2**

Zistite či nasledujúce rady konvergujú.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n^n)}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln \sqrt[n]{\ln n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2^n)}{\ln(3^n)+1}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+20)}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n+1}{3^n-2}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{Log}_\pi 2)^n$

(g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^4-1}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(\ln n)^n}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{1}{n}\right)$

(j) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n + 4^n + 5}{5^n - 4^n - 3}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{(\ln n)^n}$

(m) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{\ln(n!)}$

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(n^2)!}$

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^8 + 4n^4 + 8}{3n^9 - n^5 + 9n}$

(p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

(q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 6.3**
Ukážte že alternujúci harmonický rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

je konvergentný.

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 6.4**
Pomocou Cauchyho kritéria konvergencie ukážte že rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

je divergentný.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 6.5**
Je rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

konvergentný?
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 6.6**
Vyhodnoťte $\sum_{n=1}^{N-1} \sin(nx)$.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 6.7**
Vyhodnoťte

$$\sum_{k=1}^{n} kz^k \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 z^k$$

pre $z \neq 1$.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 6.8**
Ktoré z nasledujúcich radov konvergujú? Nájdite ich súčet.

(a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots$

(b) $1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{3^n} \frac{1}{5^{n+1}}$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 6.9**
Vyhodnoťte nasledujúcu sumu.

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=k_1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=k_{n-1}}^{\infty} \frac{1}{2^{k_n}}$$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 6.10**
Nájdite polomer konvergencie nasledujúcich radov:

(a) $z + (\alpha - \beta)\dfrac{z^2}{2!} + (\alpha - \beta)(\alpha - 2\beta)\dfrac{z^3}{3!} + (\alpha - \beta)(\alpha - 2\beta)(\alpha - 3\beta)\dfrac{z^4}{4!} + \cdots$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}(z - \imath)^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (3 + (-1)^n)^n z^n$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n + \alpha^n) z^n \quad (|\alpha| > 1)$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 6.11**
Nájdite polomer konvergencie nasledujúcich radov:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k z^k$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} k^k z^k$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} z^k$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} (z + \imath 5)^{2k} (k+1)^2$

(e) $\sum_{k=0}^{\infty} (k + 2^k) z^k$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 6.12**
Použitím geometrického radu, ukážte že

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n, \quad \text{pre } |z| < 1,$$

a

$$\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad \text{pre } |z| < 1.$$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 6.13**
Nájdite Tylorov rozvoj $\frac{1}{1+z^2}$ v $z = 0$. Určte polomer konvergencie Taylorovho radu zo singularít funkcie. Nájdite polomer konvergencie pomocou d'Alembertovho podielového kritéria.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 6.14**
Použite dve metódy na nájdenie Taylorovho rozvoja funkcie $\log(1+z)$ v $z = 0$ a určte polomer konvergencie. Najprv priamo aplikujte Taylorovu teorému, potom derivujte geometrický rad.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 6.15**

Nech $f(z) = (1+z)^\alpha$ je vetva pre ktorú $f(0) = 1$. Nájdite Taylorov rozvoj v $z = 0$. Aký je polomer konvergencie radu? ($\alpha$ je ľubovoľné komplexné číslo.)

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 6.16**

Nájdite Taylorov rozvoj v bode $z = 1$ pre nasledujúce funkcie. Aké sú polomery konvergencie?

(a) $\dfrac{1}{z}$

(b) $\operatorname{Log} z$

(c) $\dfrac{1}{z^2}$

(d) $z \operatorname{Log} z - z$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 6.17**

Nájdite Taylorov rozvoj v bode $z = 0$ pre $\mathrm{e}^z$. Aký je polomer konvergencie? Použite to na nájdenie Taylorovho rozvoja funkcií $\cos z$ a $\sin z$ v $z = 0$.

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 6.18**

Nájdite Taylorov rozvoj v bode $z = \pi$ pre kosínus a sínus.

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 6.19**

(a) Nájdite prvé tri členy v nasledujúcich Taylorovych radoch a uveďte ich konvergenčné vlastnosti.

(i) $e^{-z}$ v $z_0 = 0$

(ii) $\dfrac{1+z}{1-z}$ v $z_0 = \imath$

(iii) $\dfrac{\mathrm{e}^z}{z-1}$ v $z_0 = 0$

(b) Uvažujte funkciu $f(z)$ ktorá je analytická pre $|z - z_0| < R$. Ukážte že rad získaný derivovaním Taylorovho radu funkcie $f(z)$ člen po člene je vskutku Taylorovym radom funkcie $f'(z)$ a teda by mal konvergovať rovnomerne k $f'(z)$ pre $|z - z_0| \leq \rho < R$.

(c) Nájdite Taylorov rozvoj pre

$$\frac{1}{(1-z)^3}$$

vhodnou deriváciou geometrického radu a stanovte polomer konvergencie.

(d) Uvažujte vetvu $f(z) = (z+1)^{\imath}$ odpovedajúcu $f(0) = 1$. Nájdite Taylorov rozvoj v $z_0 = 0$ a stanovte polomer konvergencie.

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 6.20**

Nájdite Laurentov rad z funkcie $1/(z-\imath)$ v $z = 0$, pre $|z| < 1$ a $|z| > 1$.

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 6.21**

Získajte Laurentov rozvoj z

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$$

so stredom v $z = 0$ pre tri oblasti:

(a) $|z| < 1$

(b) $1 < |z| < 2$

(c) $2 < |z|$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 6.22**

Porovnaním Laurentovho rozvoja z $(z + 1/z)^m$, $m \in \mathbb{Z}^+$, s binomickým rozvojom tohto výrazu, ukážte že

$$\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^m \cos(n\theta)\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2^{m-1}} \binom{m}{(m-n)/2} & -m \le n \le m \text{ a } m-n \text{ párne} \\ 0 & \text{ináč} \end{cases}$$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 6.23**

Nech funkcia $f(z)$ je analytická v celej $z$-rovine, vrátane $\infty$, okrem bodu $z = \imath/2$, kde má jednoduchý pól, a bodu $z = 2$, kde má dvoj-násobný pól. Navyše

$$\oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z = \imath 2\pi, \quad \oint_{|z|=3} f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \quad \oint_{|z|=3} (z-1) f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Nájdite $f(z)$ a jej kompletný Laurentov rozvoj v $z = 0$.

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 6.24**

Nech $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \left(\frac{z}{3}\right)^k$. Preveďte nasledujúce výpočty aj so zdôvodnením. Krivky sú kružnice s polomerom jedna a so stredom v počiatku.

(a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \mathrm{e}^{\imath z} f(z)\, \mathrm{d}z$

(b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^4}\, \mathrm{d}z$

(c) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{f(z)\, \mathrm{e}^z}{z^2}\, \mathrm{d}z$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 6.25**

(a) Rozviňte $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ do Laurentovho radu, tak aby konvergoval v nasledujúcich oblastiach:

(i) $0 < |z| < 1$

(ii) $|z| > 1$

(iii) $|z + 1| > 2$

(b) Bez určenia radu, stanovte oblasť konvergencie Laurentovho radu reprezentujucého $f(z) = 1/(z^4 + 4)$ v mocninách $z - 1$ tak aby konvergoval v $z = \imath$.

Nápoveda, Riešenie

## 6.3 Nápovedy

**Nápoveda 6.1**
Použite Cauchyho kritérium konvergencie radov. Konkrétne, uvažujte $|S_{N+1} - S_N|$.

**Nápoveda 6.2**
(a)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n^n)}$$

Zjednodušte výraz za sumou.

(b)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \sqrt[n]{\ln n}$$

Zjednodušte výraz za sumou. Použite porovnávacie kritérium.

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2^n)}{\ln(3^n) + 1}$$

Ukážte že výrazy v sume sú nenulové pre $n \to \infty$

(d)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+20)}$$

Posuňte indexy.

(e)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n + 1}{3^n - 2}$$

Ukážte že výrazy v sume sú nenulové pre $n \to \infty$

(f)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\mathrm{Log}_{\pi} 2)^n$$

Je to geometrický rad.

(g)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^4-1}$$

Zjednodušte výraz za sumou. Použite porovnávacie kritérium.

(h)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{(\ln n)^n}$$

Porovnajte s geometrickým radom.

(i)

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \ln\left(\frac{1}{n}\right)$$

Zgrupujte páry po sebe idúcich členov, tak aby ste dostali rad s kladnými členmi.

(j)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

Použite porovnávacie kritérium.

(k)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n+4^n+5}{5^n-4^n-3}$$

Použite odmocninové kritérium.

(l)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n!}{(\ln n)^n}$$

Ukážte že dane výrazy sú nenulové pre $n \to \infty$.

(m)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{\ln(n!)}$$

Ukážte že dane výrazy sú nenulové pre $n \to \infty$.

(n)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(n^2)!}$$

Použite podielove kritérium.

(o)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^8 + 4n^4 + 8}{3n^9 - n^5 + 9n}$$

Použite porovnávacie kritérium.

(p)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

Použite porovnávacie kritérium.

(q)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}$$

Zjednodušte výraz za sumou.

**Nápoveda 6.3**
Zgrupujte členy.

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{4} &= \frac{1}{12} \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{6} &= \frac{1}{30} \\ \cdots \end{aligned}$$

**Nápoveda 6.4**
Ukážte že

$$|S_{2n} - S_n| > \frac{1}{2}.$$

**Nápoveda 6.5**
Použite podielove kritérium.

**Nápoveda 6.6**
Všimnite si že $\sin(nx) = \Im(\mathrm{e}^{\imath nx})$. Touto substitúciou dostaneme konečný geometrický rad.

**Nápoveda 6.7**
Nech $S_n$ je suma. Uvažujme $S_n - zS_n$. Použite konečný geometrický súčet.

**Nápoveda 6.8**
(a) Výraz za sumou je racionálna funkcia. Nájdite niekoľko prvých čiastočných súčtov.

(b)

(c) Je to geometrický rad.

**Nápoveda 6.9**

**Nápoveda 6.10**

**Nápoveda 6.11**

**Nápoveda 6.12**
Derivujte geometrický rad. Integrujte geometrický rad.

**Nápoveda 6.13**
Taylorov rad je geometrický rad.

**Nápoveda 6.14**

**Nápoveda 6.15**

**Nápoveda 6.16**

(a)

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 + (z - 1)}$$

Pravá strana je súčet geometrického radu.

(b) Integrujte rad pre $1/z$.

(c) Derivujte rad pre $1/z$.

(d) Integrujte rad pre $\operatorname{Log} z$.

**Nápoveda 6.17**

Vyhodnoťte derivácie z $\mathrm{e}^z$ v $z = 0$. Použite Taylorovu teorému. Napíšte kosínus a sínus pomocou exponenciálnej funkcie.

**Nápoveda 6.18**

$$\cos z = -\cos(z - \pi)$$
$$\sin z = -\sin(z - \pi)$$

**Nápoveda 6.19**

**Nápoveda 6.20**

**Nápoveda 6.21**

**Nápoveda 6.22**

**Nápoveda 6.23**

**Nápoveda 6.24**

**Nápoveda 6.25**

## 6.4 Riešenia

**Riešenie 6.1**
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje práve vtedy ak čiastočné súčty, $S_n$, sú Cauchyho postupnosti.

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \text{ také že } m, n > N \Rightarrow |S_m - S_n| < \epsilon,$$

Konkrétne, môžeme uvažovať $m = n + 1$.

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \text{ také že } n > N \Rightarrow |S_{n+1} - S_n| < \epsilon$$

Všimnime si že $S_{n+1} - s_n = a_n$.

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \text{ také že } n > N \Rightarrow |a_n| < \epsilon$$

To je presne Cauchyho kritérium konvergencie pre postupnosť $\{a_n\}$. Teda môžeme vidieť že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ je nutnou podmienkou konvergencie radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

**Riešenie 6.2**
(a)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n^n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$$

Suma konverguje.

(b)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \sqrt[n]{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \ln(\ln n) \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Suma diverguje podľa porovnávacieho kritéria.

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2^n)}{\ln(3^n) + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\ln 2}{n\ln 3 + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2}{\ln 3 + 1/n}$$

Keďže členy v sume nejdú k nule pre $n \to \infty$, rad je divergentný.

(d)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln(n + 20)} = \sum_{n=20}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

Rad diverguje.

(e)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n + 1}{3^n - 2}$$

Keďže členy v sume nejdú k nule pre $n \to \infty$, rad je divergentný.

(f)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{Log}_\pi 2)^n$$

Je to geometrický rad. Keďže $|\operatorname{Log}_\pi 2| < 1$, rad konverguje.

(g)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{n^4 - 1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Rad konverguje v porovnaní s harmonickým radom.

(h)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(\ln n)^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{n^{2/n}}{\ln n} \right)^n$$

Keďže $n^{2/n} \to 1$ pre $n \to \infty$, $n^{2/n}/\ln n \to 0$ pre $n \to \infty$. Rad konverguje v porovnaní s geometrickým radom.

(i) Dáme dohromady páry po sebe nasledujúcich členov a dostaneme rad s kladnými členmi.

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \ln\left(\frac{1}{2n}\right) - \ln\left(\frac{1}{2n+1}\right) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right)$$

Rad na pravej strane diverguje pretože členy nejdú k nule pre $n \to \infty$.

(j)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1)(2)\cdots n}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Rad konverguje v porovnaní s geometrickým radom.

(k)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n + 4^n + 5}{5^n - 4^n - 3}$$

Použijeme odmocninové kritérium na overenie konvergencie.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^n + 4^n + 5}{5^n - 4^n - 3} \right|^{1/n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{5} \left| \frac{(3/4)^n + 1 + 5/4^n}{1 - (4/5)^n - 3/5^n} \right|^{1/n} \\
&= \frac{4}{5} \\
&< 1
\end{aligned}$$

Vidíme že rad je absolútne konvergentný.

(l) Použijeme porovnávacie kritérium.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{(\ln n)^n} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n/2)^{n/2}}{(\ln n)^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{\sqrt{n/2}}{\ln n} \right)^n$$

Keďže členy v rade na pravej strane nejdú k nule pre $n \to \infty$, rad je divergentný.

(m) Použijeme porovnávacie kritérium.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{\ln(n!)} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{\ln(n^n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{n \ln(n)}$$

Keďže členy v rade na pravej strane nejdú k nule pre $n \to \infty$, rad je divergentný.

(n)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(n^2)!}$$

Použijeme d'Alembertovo kritérium.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{((n+1)!)^2(n^2)!}{((n+1)^2)!(n!)^2}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{((n+1)^2-n^2)!}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{(2n+1)!}\right| \\ &= 0\end{aligned}$$

Rad je konvergentný.

(o)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^8+4n^4+8}{3n^9-n^5+9n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1+4n^{-4}+8n^{-8}}{3-n^{-4}+9n^{-8}} \\ &> \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\end{aligned}$$

Vidíme že rad je divergentný v porovnaní s harmonickým radom.

(p)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Rad konverguje podľa porovnávacieho kritéria.

(q)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

Tento rad je alternujúci harmonický, a teda podmienečne (nie absolútne) konvergentný.

**Riešenie 6.3**

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n)} \\
&< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \\
&< \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

Teda rad je konvergentný.

**Riešenie 6.4**
Keďže

$$\begin{aligned}
|S_{2n} - S_n| &= \left| \sum_{j=n}^{2n-1} \frac{1}{j} \right| \\
&\geq \sum_{j=n}^{2n-1} \frac{1}{2n-1} \\
&= \frac{n}{2n-1} \\
&> \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

rad nesplĺňa Cauchyho kritérium konvergencie.

**Riešenie 6.5**
Použijeme d'Alembertovo kritérium.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{(n+1)}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+1)}\right)^n \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}} \\
&< 1,
\end{aligned}$$

vidíme že rad je absolútne konvergentný.

**Riešenie 6.6**

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N-1} \sin(nx) &= \sum_{n=0}^{N-1} \sin(nx) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \Im(\mathrm{e}^{\imath n x}) \\
&= \Im\left(\sum_{n=0}^{N-1} (\mathrm{e}^{\imath x})^n\right) \\
&= \begin{cases} \Im(N) & \text{pre } x = 2\pi k \\ \Im\left(\frac{1-\mathrm{e}^{\imath n x}}{1-\mathrm{e}^{\imath x}}\right) & \text{pre } x \neq 2\pi k \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{pre } x = 2\pi k \\ \Im\left(\frac{\mathrm{e}^{-\imath x/2} - \mathrm{e}^{\imath (N-1/2)x}}{\mathrm{e}^{-\imath x/2} - \mathrm{e}^{\imath x/2}}\right) & \text{pre } x \neq 2\pi k \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{pre } x = 2\pi k \\ \Im\left(\frac{\mathrm{e}^{-\imath x/2} - \mathrm{e}^{\imath (N-1/2)x}}{-\imath 2 \sin(x/2)}\right) & \text{pre } x \neq 2\pi k \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{pre } x = 2\pi k \\ \Re\left(\frac{\mathrm{e}^{-\imath x/2} - \mathrm{e}^{\imath (N-1/2)x}}{2 \sin(x/2)}\right) & \text{pre } x \neq 2\pi k \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N-1} \sin(nx) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x = 2\pi k \\ \frac{\cos(x/2) - \cos((N-1/2)x)}{2\sin(x/2)} & \text{pre } x \neq 2\pi k \end{cases}}$$

**Riešenie 6.7**
Nech

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k z^k.$$

$$
\begin{aligned}
S_n - zS_n &= \sum_{k=1}^{n} kz^k - \sum_{k=1}^{n} kz^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} kz^k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)z^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} z^k - nz^{n+1} \\
&= \frac{z - z^{n+1}}{1-z} - nz^{n+1}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\sum_{k=1}^{n} kz^k = \frac{z(1-(n+1)z^n + nz^{n+1})}{(1-z)^2}}
$$

Nech

$$
S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 z^k.
$$

$$
\begin{aligned}
S_n - zS_n &= \sum_{k=1}^{n} (k^2 - (k-1)^2) z^k - n^2 z^{n+1} \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} kz^k - \sum_{k=1}^{n} z^k - n^2 z^{n+1} \\
&= 2\frac{z(1-(n+1)z^n + nz^{n+1})}{(1-z)^2} - \frac{z - z^{n+1}}{1-z} - n^2 z^{n+1}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 z^k = \frac{z(1 + z - z^n(1 + z + n(n(z-1) - 2)(z-1)))}{(1-z)^3}}
$$

**Riešenie 6.8**
(a)

$$
\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots
$$

Usudzujeme že členy v sume sú racionálne funkcie sumačných indexov. To znamená, $a_n = 1/p(n)$ kde $p(n)$ je polynóm. Použili sme delené rozdiely na stanovenie stupňa polynómu.

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & & 6 & & 12 & & 20 \\ & 4 & & 6 & & 8 & \\ & & 2 & & 2 & & \end{array}$$

Vidíme že polynóm je druhého stupňa: $p(n) = an^2 + bn + c$. Nájdime jeho koeficienty.

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ 4a + 2b + c &= 6 \\ 9a + 3b + c &= 12 \end{aligned}$$

$$p(n) = n^2 + n$$

Vyšetríme niekoľko prvých čiastočných súčtov.

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \\ S_2 &= \frac{2}{3} \\ S_3 &= \frac{3}{4} \\ S_4 &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Usudzujeme že $S_n = n/(n+1)$. Dokážeme to indukciou. Základný prípad je pre $n = 1$. $S_1 = 1/(1+1) = 1/2$. Teraz predpokladajme indukčnú hypotézu a vypočítajme $S_{n+1}$.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + a_{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2 + (n+1)} \\ &= \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

To dokazuje indukčnú hypotézu. Vypočítajme limitu čiastočných súčtov na vyhodnotenie radu.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1}$$

(b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$$

Keďže členy v sume nejdú k nule pre $n \to \infty$, rad je divergentný.

(c) Môžeme priamo spočítať súčet tohto geometrického radu.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{3^n} \frac{1}{5^{n+1}} = \frac{1}{75} \frac{1}{1-1/30} = \frac{2}{145}}$$

**Riešenie 6.9**
Najvnútornejšia suma je geometrický rad.

$$\sum_{k_n=k_{n-1}}^{\infty} \frac{1}{2^{k_n}} = \frac{1}{2^{k_{n-1}}} \frac{1}{1-1/2} = 2^{1-k_{n-1}}$$

To nám dáva vzťah medzi $n$ do seba vložených súm a $n-1$ do seba vložených súm.

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=k_1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=k_{n-1}}^{\infty} \frac{1}{2^{k_n}} = 2 \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=k_1}^{\infty} \cdots \sum_{k_{n-1}=k_{n-2}}^{\infty} \frac{1}{2^{k_{n-1}}}$$

Vyhodnoťme $n$ do seba vložených súm indukciou.

$$\boxed{\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=k_1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=k_{n-1}}^{\infty} \frac{1}{2^{k_n}} = 2^n}$$

**Riešenie 6.10**

(a) Predpokladáme že $\beta \neq 0$. Určíme polomer konvergencie pomocou d'Alembertovho podielového kritéria.

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(\alpha-\beta)\cdots(\alpha-(n-1)\beta)/n!}{(\alpha-\beta)\cdots(\alpha-n\beta)/(n+1)!} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{\alpha-n\beta} \right| \\ &= \frac{1}{|\beta|} \end{aligned}$$

Rad konverguje absolútne pre $|z| < 1/|\beta|$.

(b) Zo vzorca pre d'Alembertovo podielové kritérium vyplýva že polomer absolútnej konvergencie je

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n/2^n}{(n+1)/2^{n+1}} \right| \\ &= 2 \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| \\ &= 2 \end{aligned}$$

Zo vzorca pre odmocninové kritérium vyplýva že polomer absolútnej konvergencie je

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n/2^n|}} \\ &= \frac{2}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Rad konverguje absolútne pre $|z - \imath| < 2$.

(c) Polomer konvergencie určíme pomocou Cauchyho kritéria.

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \\
&= \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|n^n|}} \\
&= \frac{1}{\limsup n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Rad konverguje len pre $z = 0$.

(d) Podľa d'Alembertovho podielového kritéria, polomer absolútnej konvergencie je

$$\begin{aligned}
R &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!/n^n}{(n+1)!/(n+1)^{n+1}} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^n}{n^n} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^n \\
&= \exp\left( \lim_{n\to\infty} \ln\left( \left( \frac{n+1}{n} \right)^n \right) \right) \\
&= \exp\left( \lim_{n\to\infty} n \ln\left( \frac{n+1}{n} \right) \right) \\
&= \exp\left( \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{1/n} \right) \\
&= \exp\left( \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1) - 1/n}{-1/n^2} \right) \\
&= \exp\left( \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \right) \\
&= \mathrm{e}^1
\end{aligned}$$

Rad konverguje absolútne v kruhu, $|z| < \mathrm{e}$.

(e) Podľa Cauchyho kritéria, polomer absolútnej konvergencie je

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|\,(3+(-1)^n)^n\,|}} \\ &= \frac{1}{\limsup\,(3+(-1)^n)} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Teda rad konverguje absolútne pre $|z| < 1/4$.

(f) Podľa Cauchyho kritéria, polomer absolútnej konvergencie je

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|n+\alpha^n|}} \\ &= \frac{1}{\limsup |\alpha| \sqrt[n]{|1+n/\alpha^n|}} \\ &= \frac{1}{|\alpha|} \end{aligned}$$

Teda rad konverguje absolútne pre $|z| < 1/|\alpha|$.

**Riešenie 6.11**
(a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} kz^k$$

Polomer konvergencie určíme pomocou d'Alembertovho podielového kritéria.

$$\begin{aligned} R &= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{k}{k+1}\right| \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Rad konverguje absolútne pre $|z| < 1$.

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^k z^k$$

Polomer konvergencie určíme pomocou Cauchyho kritéria.

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|k^k|}} \\ &= \frac{1}{\limsup k} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Rad konverguje len pre $z = 0$.

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} z^k$$

Polomer konvergencie určíme pomocou d'Alembertovho podielového kritéria.

$$\begin{aligned} R &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k!/k^k}{(k+1)!/(k+1)^{(k+1)}} \right| \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^k}{k^k} \\ &= \exp\left( \lim_{k\to\infty} k \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\right) \\ &= \exp\left( \lim_{k\to\infty} \frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{1/k}\right) \\ &= \exp\left( \lim_{k\to\infty} \frac{1/(k+1) - 1/k}{-1/k^2}\right) \\ &= \exp\left( \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1}\right) \\ &= \exp(1) \\ &= \mathrm{e} \end{aligned}$$

Rad konverguje absolútne pre $|z| < \mathrm{e}$.

(d)

$$\sum_{k=0}^{\infty}(z+\imath 5)^{2k}(k+1)^2$$

Použijeme d'Alembertovo podielové kritérium na stanovenie oblasti konvergencie.

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(z+\imath 5)^{2(k+1)}(k+2)^2}{(z+\imath 5)^{2k}(k+1)^2}\right| &< 1\\ |z+\imath 5|^2\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+2)^2}{(k+1)^2}\right| &< 1\\ |z+\imath 5|^2\lim_{k\to\infty}\frac{2(k+2)}{2(k+1)} &< 1\\ |z+\imath 5|^2\lim_{k\to\infty}\frac{2}{2} &< 1\\ |z+\imath 5|^2 &< 1\end{aligned}$$

(e)

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2^k)z^k$$

Polomer konvergencie určíme pomocou Cauchyho kritéria.

$$\begin{aligned}R &= \frac{1}{\limsup\sqrt[k]{|k+2^k|}}\\ &= \frac{1}{\limsup 2\sqrt[k]{|1+k/2^k|}}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Rad konverguje pre $|z|<1/2$.

**Riešenie 6.12**
Geometrický rad je

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n.$$

Tento rad je rovnomerne konvergentný v oblasti, $|z| \leq r < 1$. Derivovaním tejto rovnice dostaneme,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \quad \text{pre } |z| < 1. \end{aligned}$$

Integrovaním geometrického radu dostaneme

$$\begin{aligned} -\log(1-z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} \\ \log(1-z) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad \text{pre } |z| < 1. \end{aligned}$$

**Riešenie 6.13**

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-z^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

Funkcia $\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(1-\imath z)(1+\imath z)}$ má singularity v $z = \pm\imath$. Teda polomer konvergencie je 1. Teraz použijeme d'Alembertove podielové kritérium na overenie toho že polomer konvergencie je 1.

$$\begin{gathered} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(z)}{a_n(z)} \right| < 1 \\ \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} z^{2(n+1)}}{(-1)^n z^{2n}} \right| < 1 \\ \lim_{n\to\infty} \left| z^2 \right| < 1 \\ |z| < 1 \end{gathered}$$

**Riešenie 6.14**

**Metóda 1.**

$$\begin{aligned}\log(1+z) &= [\log(1+z)]_{z=0} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\log(1+z)\right]_{z=0}\frac{z}{1!} + \left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\log(1+z)\right]_{z=0}\frac{z^2}{2!} + \cdots \\ &= 0 + \left[\frac{1}{1+z}\right]_{z=0}\frac{z}{1!} + \left[\frac{-1}{(1+z)^2}\right]_{z=0}\frac{z^2}{2!} + \left[\frac{2}{(1+z)^3}\right]_{z=0}\frac{z^3}{3!} + \cdots \\ &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}\end{aligned}$$

Keďže najbližšia singularita funkcie $\log(1+z)$ je v $z=-1$, polomer konvergencie je $1$.

**Met'oda 2.** Vieme že geometrický rad konverguje pre $|z|<1$.

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

Integrujeme túto rovnicu a dostaneme rad pre $\log(1+z)$ v oblasti $|z|<1$.

$$\log(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}$$

Vypočítame polomer konvergencie pomocou d'Alembertovho podielového kritéria.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-(n+1)}{n}\right| = 1$$

Teda rad konverguje absolútne pre $|z|<1$.

**Riešenie 6.15**

Taylorov rozvoj funkcie $f(z)$ v $z=0$ je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n.$$

Derivácie $f(z)$ sú

$$f^{(n)}(z) = \left(\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)\right)(1+z)^{\alpha-n}.$$

Teda $f^{(n)}(0)$ je

$$f^{(n)}(0) = \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k).$$

Ak $\alpha = m$ je nezáporné celé číslo, potom len prvých $m + 1$ členov je nenulových. Taylorov rad je polynóm a rad má nekonečný polomer konvergencie.

$$(1 + z)^m = \sum_{n=0}^{m} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)}{n!} z^n$$

Ak $\alpha$ nie je nezáporné celé číslo, potom všetky členy v rade sú nenulové.

$$(1 + z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)}{n!} z^n$$

Polomer konvergencie radu je vzdialenosť k najbližšej singularite $(1 + z)^\alpha$. Ta nastáva v $z = -1$. Teda rad konverguje pre $|z| < 1$. Môžeme si to overiť pomocou d'Alembertovho podielového kritéria. Polomer konvergencie je

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\left(\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)\right) / n!}{\left(\prod_{k=0}^{n} (\alpha - k)\right) / (n + 1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n + 1}{\alpha - n} \right| = 1.$$

Ak použijeme binomický koeficient, môžeme rad napísať v kompaktnom tvare.

$$\binom{\alpha}{n} \equiv \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)}{n!}$$

$$\boxed{(1 + z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n}$$

**Riešenie 6.16**

(a) Nájdime rad pre $1/z$ formou napísania pomocou $z - 1$ a použitím geometrického radu.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 + (z - 1)}$$

$$\boxed{\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - 1)^n \quad \text{pre } |z - 1| < 1}$$

Keďže najbližšia singularita je v $z = 0$, polomer konvergencie je $1$. Rad konverguje absolútne pre $|z-1| < 1$. Polomer konvergencie tiež môžeme určiť pomocou Cauchyho kritéria.

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \\ &= \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|(-1)^n|}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(b) Integrujeme $1/\zeta$ od $1$ po $z$ v kruhu $|z-1| < 1$.

$$\int_1^z \frac{1}{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta = [\operatorname{Log}\zeta]_1^z = \operatorname{Log} z$$

Rad ktorý sme odvodili pre $1/z$ je rovnomerne konvergentný pre $|z-1| \le r < 1$. V tejto oblasti môžeme rad integrovať.

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} z &= \int_1^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\zeta-1)^n \,\mathrm{d}\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_1^z (\zeta-1)^n \,\mathrm{d}\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{Log} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(z-1)^n}{n} \quad \text{pre } |z-1| < 1}$$

(c) Rad ktorý sme odvodili pre $1/z$ je rovnomerne konvergentný pre $|z-1| \le r < 1$. V tejto oblasti môžeme rad derivovať.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{1}{z} \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n (z-1)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(z-1)^n \quad \text{pre } |z-1| < 1}$$

(d) Integrujeme $\operatorname{Log} \zeta$ od $1$ po $z$ v kruhu $|z-1| < 1$.

$$\int_1^z \operatorname{Log} \zeta \, \mathrm{d}\zeta = [\zeta \operatorname{Log} \zeta - \zeta]_1^z = z \operatorname{Log} z - z + 1$$

Rad ktorý sme odvodili pre $\operatorname{Log} z$ je rovnomerne konvergentný pre $|z-1| \leq r < 1$. V tejto oblasti môžeme rad integrovať.

$$\begin{aligned}
z \operatorname{Log} z - z &= = -1 + \int_1^z \operatorname{Log} \zeta \, \mathrm{d}\zeta \\
&= -1 + \int_1^z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (\zeta - 1)^n}{n} \, \mathrm{d}\zeta \\
&= -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (z-1)^{n+1}}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{z \operatorname{Log} z - z = -1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{n(n-1)} \quad \text{pre } |z-1| < 1}$$

**Riešenie 6.17**

Vyhodnoťme derivácie $\mathrm{e}^z$ v $z = 0$. Potom použijeme Taylorovu teorému.

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^z$$

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^z \Big|_{z=0} = 1$$

$$\boxed{\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}$$

Keďže exponenciálna funkcia nemá žiadne singularity na konečnej komplexnej rovine, polomer konvergencie je nekonečno.

Nájdime Taylorov rad pre kosínus a sínus pomocou ich prepísania v exponenciálnom tvare.

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{\mathrm{e}^{\imath z} + \mathrm{e}^{-\imath z}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\imath z)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\imath z)^n}{n!}\right) \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ \text{párne } n}}^{\infty} \frac{(\imath z)^n}{n!}\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}}$$

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{\mathrm{e}^{\imath z} - \mathrm{e}^{-\imath z}}{\imath 2} \\ &= \frac{1}{\imath 2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\imath z)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\imath z)^n}{n!}\right) \\ &= -\imath \sum_{\substack{n=0 \\ \text{nepárne } n}}^{\infty} \frac{(\imath z)^n}{n!}\end{aligned}$$

$$\boxed{\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

**Riešenie 6.18**

$$\begin{aligned}\cos z &= -\cos(z - \pi) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-\pi)^{2n}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (z-\pi)^{2n}}{(2n)!}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sin z &= -\sin(z-\pi)\\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}
$$

**Riešenie 6.19**

(a) (i)

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \mathrm{e}^{-z}\\
f(0) &= 1\\
f'(0) &= -1\\
f''(0) &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{e}^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2} + \mathcal{O}\left(z^3\right)
$$

Keďže $\mathrm{e}^{-z}$ je holomorfná na celej komplexnej rovine, Taylorov rad konverguje na komplexnej rovine.

(ii)

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1+z}{1-z}, \quad f(\imath) = \imath\\
f'(z) &= \frac{2}{(1-z)^2}, \quad f'(\imath) = \imath\\
f''(z) &= \frac{4}{(1-z)^3}, \quad f''(\imath) = -1+\imath
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1+z}{1-z} = \imath + \imath(z-\imath) + \frac{-1+\imath}{2}(z-\imath)^2 + \mathcal{O}\left((z-\imath)^3\right)
$$

Keďže najbližšia singularita, (v $z=1$), je vzdialenosť $\sqrt{2}$ od $z_0=\imath$, polomer konvergencie je $\sqrt{2}$. Rad konverguje absolútne pre $|z-\imath| < \sqrt{2}$.

(iii)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{e}^z}{z-1} &= -\left(1+z+\frac{z^2}{2}+\mathcal{O}\left(z^3\right)\right)\left(1+z+z^2+\mathcal{O}\left(z^3\right)\right) \\
&= -1-2z-\frac{5}{2}z^2+\mathcal{O}\left(z^3\right)
\end{aligned}
$$

Keďže najbližšia singularita, (v $z=1$), je vzdialenosť $1$ od $z_0=0$, polomer konvergencie je $1$. Rad konverguje absolútne pre $|z|<1$.

(b) Keďže $f(z)$ je analytická v $|z-z_0|<R$, jej Taylorov rozvoj konverguje absolútne v tejto oblasti.

$$
f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)z^n}{n!}
$$

Taylorov rad konverguje rovnomerne v každej uzavretej podoblasti $|z-z_0|<R$. Uvažujme podoblasť $|z-z_0|\leq\rho<R$. V oblasti rovnomernej konvergencie môžeme zameniť deriváciu a sumáciu.

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)z^n}{n!} \\
f'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nf^{(n)}(z_0)z^{n-1}}{n!} \\
f'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n+1)}(z_0)z^n}{n!}
\end{aligned}
$$

Poznamenajme že toto je Taylorov rad ktorý by sme mohli obdržať priamo pre $f'(z)$. Keďže $f(z)$ je analytická v $|z-z_0|<R$ taká je aj $f'(z)$.

$$
f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n+1)}(z_0)z^n}{n!}
$$

(c)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-z)^3} &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{1}{2}\frac{1}{1-z} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^{n-2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)z^n
\end{aligned}$$

Polomer konvergencie je $1$, čo je vzdialenosť k najbližšej singularite v $z = 1$.

(d) Taylorov rozvoj funkcie $f(z)$ v $z = 0$ je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Vypočítajme derivácie $f(z)$.

$$f^{(n)}(z) = \left(\prod_{k=0}^{n-1}(\imath - k)\right)(1+z)^{\imath - n}.$$

Teraz môžeme určiť koeficienty radu.

$$f^{(n)}(0) = \prod_{k=0}^{n-1}(\imath - k)$$

$$(1+z)^{\imath} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\imath - k)}{n!} z^n$$

Polomer konvergencie radu je vzdialenosť k najbližšej singularite $(1+z)^{\imath}$. Ta nastáva v $z = -1$. Teda rad konverguje pre $|z| < 1$. Môžeme si to overiť pomocou d'Alembertovho podielového kritéria. Polomer konvergencie je

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\prod_{k=0}^{n-1}(\imath - k)\right)/n!}{\left(\prod_{k=0}^{n}(\imath - k)\right)/(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\imath - n}\right| = 1$$

Ak použijeme binomický koeficient,

$$\binom{\alpha}{n} \equiv \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)}{n!},$$

potom môžeme napísať rad v kompaktnom tvare.

$$\boxed{(1+z)^\imath = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\imath}{n} z^n}$$

**Riešenie 6.20**
Pre $|z| < 1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-\imath} &= \frac{\imath}{1+\imath z} \\ &= \imath \sum_{n=0}^{\infty} (-\imath z)^n\end{aligned}$$

(Všimnite si že $|z| < 1 \Leftrightarrow |-\imath z| < 1$.)
Pre $|z| > 1$:

$$\frac{1}{z-\imath} = \frac{1}{z}\frac{1}{(1-\imath/z)}$$

(Všimnite si že $|z| > 1 \Leftrightarrow |-\imath/z| < 1$.)

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\imath}{z}\right)^n \\ &= \frac{1}{z}\sum_{n=-\infty}^{0} \imath^{-n} z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{0} (-\imath)^n z^{n-1} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} (-\imath)^{n+1} z^n\end{aligned}$$

**Riešenie 6.21**
Rozložme funkciu na parciálne zlomky.

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2}$$

Taylorov rozvoj v $z = 0$ pre $1/(z+1)$ je

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+z} &= \frac{1}{1-(-z)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n, \quad \text{pre } |z| < 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad \text{pre } |z| < 1
\end{aligned}$$

Rad v $z = \infty$ pre $1/(z+1)$ je

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+z} &= \frac{1/z}{1+1/z} \\
&= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1/z)^n, \quad \text{pre } |1/z| < 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-n-1}, \quad \text{pre } |z| > 1 \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{n+1} z^n, \quad \text{pre } |z| > 1
\end{aligned}$$

Taylorov rozvoj v $z = 0$ pre $1/(z+2)$ je

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2+z} &= \frac{1/2}{1+z/2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-z/2)^n, \quad \text{pre } |z/2| < 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n, \quad \text{pre } |z| < 2
\end{aligned}$$

Rad v $z = \infty$ pre $1/(z+2)$ je

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2+z} &= \frac{1/z}{1+2/z} \\
&= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-2/z)^n, \quad \text{pre } |2/z| < 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n z^{-n-1}, \quad \text{pre } |z| > 2 \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} z^n, \quad \text{pre } |z| > 2
\end{aligned}$$

Na nájdenie rozvojov v troch oblastiach jednoducho vyberieme vhodny rad.

(a)

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{1+z} - \frac{1}{2+z} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n, \quad \text{pre } |z| < 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n, \quad \text{pre } |z| < 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} z^n, \quad \text{pre } |z| < 1}$$

(b)

$$f(z) = \frac{1}{1+z} - \frac{1}{2+z}$$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n+1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n, \quad \text{pre } 1 < |z| < 2}$$

(c)

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{1+z} - \frac{1}{2+z} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{n+1} z^n - \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} z^n, \quad \text{pre } 2 < |z|
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{n+1} \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} z^n, \quad \text{pre } 2 < |z|}
$$

**Riešenie 6.22**
**Laurentov rad.** Predpokladajme že $m$ je nezáporné celé číslo a že $n$ je celé číslo. Laurentov rad v bode $z = 0$ z funkcie

$$
f(z) = \left(z + \frac{1}{z}\right)^m
$$

je

$$
f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n
$$

kde

$$
a_n = \frac{1}{\imath 2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} \,\mathrm{d}z
$$

a $C$ je krivka obiehajúca počiatok raz v kladnom smere. Prepíšme koeficientove integrály do žiadúceho tvaru.

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\imath 2\pi} \oint_C \frac{(z+1/z)^m}{z^{n+1}} \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\imath 2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\mathrm{e}^{\imath\theta} + \mathrm{e}^{-\imath\theta})^m}{\mathrm{e}^{\imath(n+1)\theta}} \imath\,\mathrm{e}^{\imath\theta} \,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2^m \cos^m\theta \,\mathrm{e}^{-\imath n\theta} \,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2^{m-1}}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^m\theta (\cos(n\theta) - \imath \sin(n\theta)) \,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

Všimnite si že $\cos^m\theta$ je párna a $\sin(n\theta)$ je nepárna v $\theta = \pi$.

$$= \frac{2^{m-1}}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^m\theta \cos(n\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

**Binomický rad.** Teraz nájdime binomický rozvoj funkcie $f(z)$.

$$\begin{aligned}
\left(z + \frac{1}{z}\right)^m &= \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} z^{m-n} \left(\frac{1}{z}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} z^{m-2n} \\
&= \sum_{\substack{n=-m \\ m-n \text{ párne}}}^{m} \binom{m}{(m-n)/2} z^n
\end{aligned}$$

Koeficienty radu $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ sú

$$a_n = \begin{cases} \binom{m}{(m-n)/2} & -m \le n \le m \text{ a } m-n \text{ párne} \\ 0 & \text{ináč} \end{cases}$$

Porovnaním koeficientov nájdených dvoma metódami vyhodnotíme daný integrál.

$$\boxed{\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^m \cos(n\theta)\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2^{m-1}} \binom{m}{(m-n)/2} & -m \le n \le m \text{ a } m-n \text{ párne} \\ 0 & \text{ináč} \end{cases}}$$

**Riešenie 6.23**

Najprv napíšme $f(z)$ v tvare

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - \imath/2)(z-2)^2}.$$

$g(z)$ je holomorfná funkcia na celej komplexnej rovine ktorá nerastie rýchlejšie než $z^3$ v nekonečne. Rozložením $g(z)$ do Taylorovho radu v počiatku, vidíme že je to polynóm stupňa nie viac ako $3$.

$$f(z) = \frac{\alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z + \delta}{(z - \imath/2)(z-2)^2}$$

Keďže $f(z)$ je racionálna funkcia, rozložme ju na parciálne zlomky a dostaneme tvar vhodný na integrovanie.

$$f(z) = \frac{a}{z - \imath/2} + \frac{b}{z-2} + \frac{c}{(z-2)^2} + d$$

Použijeme hodnotu integrálov z $f(z)$ na určenie konštánt, $a$, $b$, $c$ a $d$.

$$\oint_{|z|=1} \left( \frac{a}{z-\imath/2} + \frac{b}{z-2} + \frac{c}{(z-2)^2} + d \right) \mathrm{d}z = \imath 2\pi$$
$$\imath 2\pi a = \imath 2\pi$$
$$a = 1$$

$$\oint_{|z|=3} \left( \frac{1}{z-\imath/2} + \frac{b}{z-2} + \frac{c}{(z-2)^2} + d \right) \mathrm{d}z = 0$$
$$\imath 2\pi(1+b) = 0$$
$$b = -1$$

Všimnite si že použitím druhého vzťahu môžeme zmeniť tretí vzťah na

$$\oint_{|z|=3} z f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

$$\oint_{|z|=3} z \left( \frac{1}{z-\imath/2} - \frac{1}{z-2} + \frac{c}{(z-2)^2} + d \right) \mathrm{d}z = 0$$
$$\oint_{|z|=3} \left( \frac{(z-\imath/2)+\imath/2}{z-\imath/2} - \frac{(z-2)+2}{z-2} + \frac{c(z-2)+2c}{(z-2)^2} \right) \mathrm{d}z = 0$$
$$\imath 2\pi \left( \frac{\imath}{2} - 2 + c \right) = 0$$
$$c = 2 - \frac{\imath}{2}$$

Takže vidíme že funkcia je

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{z-\imath/2} - \frac{1}{z-2} + \frac{2-\imath/2}{(z-2)^2} + d,}$$

kde $d$ je ľubovoľná konštanta. Tiež môžeme napísať funkciu v tvare:

$$\boxed{f(z) = \frac{dz^3 + 15 - \imath 8}{4(z - \imath/2)(z-2)^2}.}$$

Nájdime kompletný Laurentov rozvoj v $z = 0$ pre každý člen v rozklade $f(z)$ na parciálne zlomky.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z - \imath/2} &= \frac{\imath 2}{1 + \imath 2 z} \\
&= \imath 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-\imath 2 z)^n, \quad \text{pre } |-\imath 2 z| < 1 \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} (-\imath 2)^{n+1} z^n, \quad \text{pre } |z| < 1/2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z - \imath/2} &= \frac{1/z}{1 - \imath/(2z)} \\
&= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\imath}{2z}\right)^n, \quad \text{pre } |\imath/(2z)| < 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\imath}{2}\right)^n z^{-n-1}, \quad \text{pre } |z| < 2 \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{\imath}{2}\right)^{-n-1} z^n, \quad \text{pre } |z| < 2 \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1} (-\imath 2)^{n+1} z^n, \quad \text{pre } |z| < 2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{z-2} &= \frac{1/2}{1-z/2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n, \quad \text{pre } |z/2| < 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad \text{pre } |z| < 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{z-2} &= -\frac{1/z}{1-2/z} \\
&= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n, \quad \text{pre } |2/z| < 1 \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}2^n z^{-n-1}, \quad \text{pre } |z| > 2 \\
&= -\sum_{n=-\infty}^{-1}2^{-n-1}z^n, \quad \text{pre } |z| > 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{2-\imath/2}{(z-2)^2} &= (2-\imath/2)\frac{1}{4}(1-z/2)^{-2} \\
&= \frac{4-\imath}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}\left(-\frac{z}{2}\right)^n, \quad \text{pre } |z/2| < 1 \\
&= \frac{4-\imath}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(-1)^n 2^{-n}z^n, \quad \text{pre } |z| < 2 \\
&= \frac{4-\imath}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}z^n, \quad \text{pre } |z| < 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{2-\imath/2}{(z-2)^2} &= \frac{2-\imath/2}{z^2}\left(1-\frac{2}{z}\right)^{-2} \\
&= \frac{2-\imath/2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}\left(-\frac{2}{z}\right)^n, \quad \text{pre } |2/z|<1 \\
&= (2-\imath/2)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(-1)^n 2^n z^{-n-2}, \quad \text{pre } |z|>2 \\
&= (2-\imath/2)\sum_{n=-\infty}^{-2}(-n-1)2^{-n-2}z^n, \quad \text{pre } |z|>2 \\
&= -(2-\imath/2)\sum_{n=-\infty}^{-2}\frac{n+1}{2^{n+2}}z^n, \quad \text{pre } |z|>2
\end{aligned}
$$

Vezmime vhodnú kombináciu týchto radov na nájdenie Laurentovych rozvojov v oblastiach: $|z|<1/2$, $1/2<|z|<2$ a $2<|z|$. Pre $|z|<1/2$, máme

$$
f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}(-\imath 2)^{n+1}z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} + \frac{4-\imath}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}z^n + d
$$

$$
f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-(-\imath 2)^{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{4-\imath}{8}\frac{n+1}{2^n}\right)z^n + d
$$

$$
\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-(-\imath 2)^{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{4-\imath}{4}(n+1)\right)\right)z^n + d, \quad \text{pre } |z|<1/2}
$$

Pre $1/2<|z|<2$, máme

$$
f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1}(-\imath 2)^{n+1}z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} + \frac{4-\imath}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}z^n + d
$$

$$
\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1}(-\imath 2)^{n+1}z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{4-\imath}{4}(n+1)\right)\right)z^n + d, \quad \text{pre } 1/2<|z|<2}
$$

Pre $2 < |z|$, máme

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-\imath 2)^{n+1} z^n - \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{-n-1} z^n - (2 - \imath/2) \sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{n+1}{2^{n+2}} z^n + d$$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2} \left( (-\imath 2)^{n+1} - \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 + (1 - \imath/4)(n+1)\right) \right) z^n + d, \quad \text{pre } 2 < |z|}$$

**Riešenie 6.24**
Polomer konvergencie radu pre $f(z)$ je

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{k^3/3^k}{(k+1)^3/3^{k+1}} \right| = 3 \lim_{n\to\infty} \left| \frac{k^3}{(k+1)^3} \right| = 3.$$

Teda $f(z)$ je funkcia ktorá je analytická vo vnútri kružnice o polomere 3.

(a) Integrand je analytický. Teda, podľa Cauchyho teorémy, hodnota integrálu je nula.

$$\boxed{\oint_{|z|=1} \mathrm{e}^{\imath z} f(z) \, \mathrm{d}z = 0}$$

(b) Použijeme Cauchyho integrálny vzorec na vyhodnotenie integrálu.

$$\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^4} \, \mathrm{d}z = \frac{\imath 2\pi}{3!} f^{(3)}(0) = \frac{\imath 2\pi}{3!} \frac{3! 3^3}{3^3} = \imath 2\pi$$

$$\boxed{\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^4} \, \mathrm{d}z = \imath 2\pi}$$

(c) Použijeme Cauchyho integrálny vzorec na vyhodnotenie integrálu.

$$\oint_{|z|=1} \frac{f(z) \, \mathrm{e}^z}{z^2} \, \mathrm{d}z = \frac{\imath 2\pi}{1!} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} (f(z) \, \mathrm{e}^z)\big|_{z=0} = \imath 2\pi \frac{1! 1^3}{3^1}$$

$$\boxed{\oint_{|z|=1} \frac{f(z) \, \mathrm{e}^z}{z^2} \, \mathrm{d}z = \frac{\imath 2\pi}{3}}$$

**Riešenie 6.25**
(a) (i)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z(1-z)} &= \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \text{pre } 0 < |z| < 1 \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n=-1}^{\infty} z^n, \quad \text{pre } 0 < |z| < 1
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z(1-z)} &= \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} \\
&= \frac{1}{z} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} \\
&= \frac{1}{z} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n, \quad \text{pre } |z| > 1 \\
&= -\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}, \quad \text{pre } |z| > 1 \\
&= -\sum_{n=-2}^{-\infty} z^n, \quad \text{pre } |z| > 1
\end{aligned}
$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(1-z)} &= \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} \\
&= \frac{1}{(z+1)-1} + \frac{1}{2-(z+1)} \\
&= \frac{1}{(z+1)} \frac{1}{1-1/(z+1)} - \frac{1}{(z+1)} \frac{1}{1-2/(z+1)}, \quad \text{pre } |z+1| > 1 \text{ a } |z+1| > 2 \\
&= \frac{1}{(z+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+1)^n} - \frac{1}{(z+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(z+1)^n}, \quad \text{pre } |z+1| > 1 \text{ a } |z+1| > 2 \\
&= \frac{1}{(z+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-2^n}{(z+1)^n}, \quad \text{pre } |z+1| > 2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2^n}{(z+1)^{n+1}}, \quad \text{pre } |z+1| > 2 \\
&= \sum_{n=-2}^{-\infty} \left(1-2^{-n-1}\right)(z+1)^n, \quad \text{pre } |z+1| > 2
\end{aligned}$$

(b) Najprv, rozložme menovateľ zlomku $f(z) = 1/(z^4+4)$.

$$z^4 + 4 = (z-1-\imath)(z-1+\imath)(z+1-\imath)(z+1+\imath)$$

Hľadáme prstenec okolo $z = 1$ obsahujúci bod $z = \imath$ kde $f(z)$ je analytická. Singularity v $z = 1 \pm \imath$ sú vo vzdialenosti $1$ od $z = 1$; singularity v $z = -1 \pm \imath$ sú vo vzdialenosti $\sqrt{5}$. Keďže $f(z)$ je analytická v oblasti $1 < |z-1| < \sqrt{5}$ Laurentov rad je konvergentný na tejto oblasti.

# Kapitola 7

# Rezíduá

## 7.1 Úvod

**Rezíduá.** Nech $f(z)$ je jednoznačná a analytická v okolí bodu $z_0$, okrem bodu samotného. Potom $f(z)$ má Laurentov rozvoj

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

Rezíduum z $f(z)$ v $z = z_0$ je koeficient člena $\frac{1}{z-z_0}$:

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = a_{-1}.$$

Rezíduum v bode vetvenia alebo neizolovanej singularite nie je definovaný, keďže Laurentov rozvoj neexistuje. Ak $f(z)$ má $n$-násobný pól v $z = z_0$, potom môžeme použiť vzorec pre rezíduá:

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z \to z_0} \left( \frac{1}{(n-1)!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \left[ (z - z_0)^n f(z) \right] \right).$$

**Teoréma o rezíduách.** Ak $f(z)$ je analytická v kompaktnej, uzavretej, súvislej oblasti $D$, okrem izolovaných singularít v $\{z_n\}$ vo vnútri $D$, potom

$$\int_{\partial D} f(z) \, \mathrm{d}z = \sum_k \oint_{C_k} f(z) \, \mathrm{d}z = \imath 2\pi \sum_n \operatorname{Res}(f(z), z_n).$$

Množina kriviek $\{C_k\}$ vytvára kladne orientovanú hranicu $\partial D$ oblasti $D$. Ak hranica oblasti je jednoduchá krivka $C$, potom platí zjednodušený vzťah

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \imath 2\pi \sum_n \operatorname{Res}(f(z), z_n).$$

**Jordanova lema.**

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta < \frac{\pi}{R}.$$

Nech $a$ je kladná konštanta. Ak $f(z)$ ide k nule pre $|z| \to \infty$ potom integrál

$$\int_C f(z)\,\mathrm{e}^{\imath a z}\,\mathrm{d}z$$

cez polkružnicu s polomerom $R$ v hornej polrovine ide k nule pre $R \to \infty$.

**Výpočet určitých integrálov so sínus a kosínus.** Na výpočet určitých integrálov typu

$$\int_a^{a+2\pi} F(\sin\theta, \cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

je užitočné urobiť transformáciu premenných $z = \mathrm{e}^{\imath\theta}$. Takto dostaneme krivkový integrál pozdĺž jednotkovej kružnice so stredom v počiatku. Sínus, kosínus a diferenciál môžeme vyjadriť pomocou premennej $z$.

$$\sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{\imath 2}, \quad \cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad d\theta = \frac{\mathrm{d}z}{\imath z}$$

**Integrály od $-\infty$ do $\infty$.** Nech $f(z)$ je analytická okrem izolovaných singularít, z ktorých žiadna neleží na reálnej osi. Nech $a_1, \dots, a_m$ sú singularity $f(z)$ v hornej polrovine a $C_R$ je polkružnica od $R$ do $-R$ v hornej polrovine. Ak

$$\lim_{R\to\infty}\left(R \max_{z\in C_R} |f(z)|\right) = 0$$

potom

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \imath 2\pi \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}\left(f(z), a_j\right).$$

Nech $b_1, \dots, b_n$ sú singularity $f(z)$ v dolnej polrovine. Nech $C_R$ je polkružnica od $R$ do $-R$ v dolnej polrovine. Ak

$$\lim_{R\to\infty}\left(R \max_{z\in C_R} |f(z)|\right) = 0$$

potom

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = -\imath 2\pi \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}\left(f(z), b_j\right).$$

**Integrály od 0 do $\infty$.** Nech $f(z)$ je analytická okrem izolovaných singularít, z ktorých žiadna neleží na reálnej osi, $[0, \infty)$. Nech $z_1, \dots, z_n$ sú singularity $f(z)$. Ak $f(z) \ll z^{\alpha}$ pre $z \to 0$ pre nejaké $\alpha > -1$ a $f(z) \ll z^{\beta}$ pre $z \to \infty$ pre nejaké $\beta < -1$ potom

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\, dx = -\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(f(z)\log z, z_k\right),$$

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\log\, dx = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(f(z)\log^2 z, z_k\right) + \imath\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(f(z)\log z, z_k\right).$$

Predpokladajme že $a$ nie je celé číslo. Ak $z^a f(z) \ll z^{\alpha}$ pre $z \to 0$ pre nejaké $\alpha > -1$ a $z^a f(z) \ll z^{\beta}$ as $z \to \infty$ pre nejaké $\beta < -1$ potom

$$\int_{0}^{\infty} x^a f(x)\, dx = \frac{\imath 2\pi}{1 - \mathrm{e}^{\imath 2\pi a}} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(z^a f(z), z_k\right),$$

$$\int_{0}^{\infty} x^a f(x)\log x\, dx = \frac{\imath 2\pi}{1 - \mathrm{e}^{\imath 2\pi a}} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(z^a f(z)\log z, z_k\right), + \frac{\pi^2 a}{\sin^2(\pi a)} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(z^a f(z), z_k\right).$$

**Fourierove integrály.** Nech $f(z)$ je analytická okrem izolovaných singularít, z ktorých žiadna neleží na reálnej osi. Predpokladajme že $f(z)$ ide k nule pre $|z| \to \infty$. Ak $\omega$ je kladné reálne číslo potom

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\imath\omega x}\, dx = \imath 2\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z)\,\mathrm{e}^{\imath\omega z}, z_k),$$

kde $z_1, \dots, z_n$ sú singularity $f(z)$ v hornej polrovine. Ak $\omega$ je záporné reálne číslo potom

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\imath\omega x}\, dx = -\imath 2\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z)\,\mathrm{e}^{\imath\omega z}, z_k),$$

kde $z_1, \dots, z_n$ sú singularity $f(z)$ v dolnej polrovine.

## 7.2 Úlohy

**Úloha 7.1**
Vyhodnoťte nasledujúce integrály po uzavretej krivke s použitím teorémy o rezíduách.

(a) $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-1}$, kde $C$ je krivka parameterizovaná pomocou $r = 2\cos(2\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

(b) $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{e}^{\imath z}}{z^2(z-2)(z+\imath 5)}\,\mathrm{d}z$, kde $C$ je kladne orientovaná kružnica $|z| = 3$.

(c) $\displaystyle\int_C \mathrm{e}^{1/z}\sin(1/z)\,\mathrm{d}z$, kde $C$ je kladne orientovaná kružnica $|z| = 1$.

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 7.2**
Odvoďte Cauchyho integrálny vzorec pomocou teorémy o rezíduách.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 7.3**
Vypočítajte rezíduá nasledujúcich funkcií v každom póle v konečnej časti roviny.

(a) $\displaystyle\frac{1}{z^4-a^4}$

(b) $\displaystyle\frac{\sin z}{z^2}$

(c) $\displaystyle\frac{1+z^2}{z(z-1)^2}$

(d) $\displaystyle\frac{\mathrm{e}^z}{z^2+a^2}$

(e) $\displaystyle\frac{(1-\cos z)^2}{z^7}$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 7.4**
Nech $f(z)$ má $n$-násobný pól v $z = z_0$. Dokážte vzorec pre residuá:

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z \to z_0} \left( \frac{1}{(n-1)!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \left[ (z - z_0)^n f(z) \right] \right).$$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 7.5**
Uvažujme funkciu

$$f(z) = \frac{z^4}{z^2 + 1}.$$

Klasifikujte singularity funkcie $f(z)$ v rozšírenej komplexnej rovine. Vypočítajte rezíduá v každom póle a nekonečne. Nájdite Laurentove rozvoje a ich oblasti konvergencie v bodoch $z = 0$, $z = \imath$ a $z = \infty$.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 7.6**
Nech $P(z)$ je polynóm ktorého žiaden koreň neleží na uzavretej krivke $\Gamma$. Ukážte že

$$\frac{1}{\imath 2\pi} \int \frac{P'(z)}{P(z)} \, \mathrm{d}z = \text{počet koreňov } P(z) \text{, ktoré ležia vo vnútri } \Gamma.$$

Korene sa počítajú podľa ich násobnosti.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 7.7**
Nájdite hodnotu

$$\oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{(z - \pi) \tan z} \, \mathrm{d}z,$$

kde $C$ je kladne orientovaná kružnica

(a) $|z| = 2$

(b) $|z| = 4$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 7.8**
Vyhodnoťte nasledujúce nevlastné integrály.

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+b)^2+a^2}, \quad a>0$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 7.9**
Vyhodnoťte pomocou krivkových integrálov

$$\int_0^\infty \frac{x^6}{(x^4+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 7.10**
Predpokladajme že $f(z)$ ide k nule pre $|z| \to \infty$. Ak $\omega$ je (kladné/ záporné) reálne číslo a $C_R$ je polkružnica o polomere $R$ v (hornej/ dolnej) polrovine, potom ukážte že integrál

$$\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{e}^{\imath\omega z}\,\mathrm{d}z$$

ide k nule pre $R \to \infty$.
Nápoveda, Riešenie

**Úloha 7.11**
Vyhodnoťte pomocou krivkových integrálov

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos 2x}{x-\imath\pi}\,\mathrm{d}x.$$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 7.12**
Vyhodnoťte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}.$$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 7.13**
Nájdite hodnotu integrálu $I$

$$I = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^6}$$

s využitím krivkového integrálu

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{1+z^6}$$

po vhodne zvolenej krivke $\Gamma$.

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 7.14**
Vyhodnoťte nasledujúce reálne integrály.

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta}$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta \,\mathrm{d}\theta$

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 7.15**
Použite krivkový integrál na vyhodnotenie integrálov

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2+\sin(\theta)}$,

(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\theta)}{1-2a\cos(\theta)+a^2}\,\mathrm{d}\theta$ pre $|a|<1,\ n\in\mathbb{Z}^{0+}$.

Nápoveda, Riešenie

**Úloha 7.16**
Vyhodnoťte

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Nápoveda, Riešenie

## 7.3 Nápovedy

**Nápoveda 7.1**

**Nápoveda 7.2**

**Nápoveda 7.3**

**Nápoveda 7.4**
Dosaďte Laurentov rad do vzorca a zjednodušte.

**Nápoveda 7.5**
Pri výpočte rezídua v nekonečne využite že súčet všetkých rezíduí funkcie v rozšírenej komplexnej rovine je nula. Aby ste dostali Laurentov rozvoj v $z = \imath$, napíšte funkciu ako vlastnú racionálnu funkciu (čitateľ má nižší stupeň ako menovateľ) a rozložte na parciálne zlomky.

**Nápoveda 7.6**
Zo základnej teorémy algebry, je vždy možné rozložiť $P(z)$ do tvaru $P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$. Použitím tohto tvaru $P(z)$, integrand $P'(z)/P(z)$ sa redukuje na veľmi jednoduchý výraz.

**Nápoveda 7.7**

**Nápoveda 7.8**

**Nápoveda 7.9**

**Nápoveda 7.10**
Využite

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{-R \sin \theta} \, \mathrm{d}\theta < \frac{\pi}{R}.$$

**Nápoveda 7.11**

**Nápoveda 7.12**
Uvažujte integrál pozdĺž hranice oblasti, $0 < r < R$, $0 < \theta < 2\pi/3$.

**Nápoveda 7.13**

**Nápoveda 7.14**

**Nápoveda 7.15**

**Nápoveda 7.16**
Substituujte $x = \sin \xi$ a potom $z = \mathrm{e}^{\imath\xi}$.

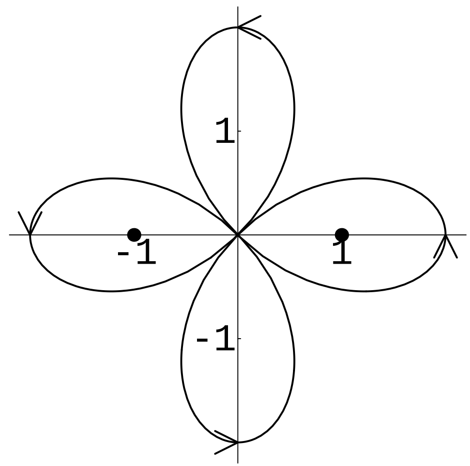
## 7.4 Riešenia

**Riešenie 7.1**

(a) Uvažujme

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-1},$$

kde $C$ je krivka parametrizovaná vzťahmi $r = 2\cos(2\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$. (Viď obr. 7.1.) Jednoduché póly sú v $z = \pm 1$. Integrál vyhodnotíme




Obr. 7.1: Krivka $r = 2\cos(2\theta)$.

pomocou teorémy o rezíduách.

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-1} &= \imath 2\pi \left(\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2-1}, z=1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2-1}, z=-1\right)\right) \\
&= \imath 2\pi \left( \left.\frac{1}{z+1}\right|_{z=1} + \left.\frac{1}{z-1}\right|_{z=-1} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(b) Uvažujme integrál

$$\int_C \frac{\mathrm{e}^{\imath z}}{z^2(z-2)(z+\imath 5)}\,\mathrm{d}z,$$

kde $C$ je kladne orientovaná kružnica $|z|=3$. Existuje dvojnásobný pól v $z=0$, a jednoduché póly v $z=2$ a $z=-\imath 5$. Póly v $z=0$ a $z=2$ ležia vo vnútri krivky. Integrál vyhodnotíme pomocou teorémy o rezíduách.

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{\mathrm{e}^{\imath z}}{z^2(z-2)(z+\imath 5)}\,\mathrm{d}z &= \imath 2\pi\Bigg(\operatorname{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^{\imath z}}{z^2(z-2)(z+\imath 5)}, z=0\right)\\
&\qquad + \operatorname{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^{\imath z}}{z^2(z-2)(z+\imath 5)}, z=2\right)\Bigg)\\
&= \imath 2\pi\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{e}^{\imath z}}{(z-2)(z+\imath 5)}\bigg|_{z=0} + \frac{\mathrm{e}^{\imath z}}{z^2(z+\imath 5)}\bigg|_{z=2}\right)\\
&= \imath 2\pi\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{e}^{\imath z}}{(z-2)(z+\imath 5)}\bigg|_{z=0} + \frac{\mathrm{e}^{\imath z}}{z^2(z+\imath 5)}\bigg|_{z=2}\right)\\
&= \imath 2\pi\left(\frac{\imath\left(z^2+(\imath 7-2)z-5-\imath 12\right)\mathrm{e}^{\imath z}}{(z-2)^2(z+\imath 5)^2}\bigg|_{z=0} + \left(\frac{1}{58}-\imath\frac{5}{116}\right)\mathrm{e}^{\imath 2}\right)\\
&= \imath 2\pi\left(-\frac{3}{25}+\frac{\imath}{20}+\left(\frac{1}{58}-\imath\frac{5}{116}\right)\mathrm{e}^{\imath 2}\right)\\
&= -\frac{\pi}{10}+\frac{5}{58}\pi\cos 2-\frac{1}{29}\pi\sin 2+\imath\left(-\frac{6\pi}{25}+\frac{1}{29}\pi\cos 2+\frac{5}{58}\pi\sin 2\right)
\end{aligned}$$

(c) Uvažujme integrál

$$\int_C \mathrm{e}^{1/z}\sin(1/z)\,\mathrm{d}z,$$

kde $C$ je kladne orientovaná kružnica $|z|=1$. Podstatná singularita je v $z=0$. Rezíduum vypočítame pomocou rozvoja integrandu do Laurentovho radu.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{1/z}\sin(1/z) &= \left(1+\frac{1}{z}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)\left(\frac{1}{z}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{z^3}\right)\right)\\
&= \frac{1}{z}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right)
\end{aligned}$$

Rezíduum v $z=0$ je $1$. Integrál vyhodnotíme pomocou teorémy o rezíduách.

$$\int_C \mathrm{e}^{1/z}\sin(1/z)\,\mathrm{d}z = \imath 2\pi$$

**Riešenie 7.2**
Ak $f(\zeta)$ je analytická v kompaktnej, uzavretej, súvislej oblasti $D$ a $z$ je bod vo vnútri $D$, potom Cauchyho integrálny vzorec hovorí že

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{\imath 2\pi} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta.$$

Na potvrdenie, vyhodnoťme integrál pomocou teorémy o rezíduách. Existuje $(n+1)$-násobný pól v bode $\zeta = z$.

$$\begin{aligned} \frac{n!}{\imath 2\pi} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta. &= \frac{n!}{\imath 2\pi} \frac{\imath 2\pi}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\zeta^n} f(\zeta) \bigg|_{\zeta = z} \\ &= f^{(n)}(z) \end{aligned}$$

**Riešenie 7.3**
(a)

$$\frac{1}{z^4 - a^4} = \frac{1}{(z-a)(z+a)(z-\imath a)(z+\imath a)}$$

Jednoduché póly sú v $z = \pm a$ a $z = \pm \imath a$. Vypočítajme v nich rezíduá.

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left( \frac{1}{z^4 - a^4}, z = a \right) &= \frac{1}{(z+a)(z-\imath a)(z+\imath a)} \bigg|_{z=a} = \frac{1}{4a^3} \\ \operatorname{Res}\left( \frac{1}{z^4 - a^4}, z = -a \right) &= \frac{1}{(z-a)(z-\imath a)(z+\imath a)} \bigg|_{z=-a} = -\frac{1}{4a^3} \\ \operatorname{Res}\left( \frac{1}{z^4 - a^4}, z = \imath a \right) &= \frac{1}{(z-a)(z+a)(z+\imath a)} \bigg|_{z=\imath a} = \frac{\imath}{4a^3} \\ \operatorname{Res}\left( \frac{1}{z^4 - a^4}, z = -\imath a \right) &= \frac{1}{(z-a)(z+a)(z-\imath a)} \bigg|_{z=-\imath a} = -\frac{\imath}{4a^3} \end{aligned}$$

(b)

$$\frac{\sin z}{z^2}$$

Keďže menovateľ má dvoj-násobnú nulu v $z = 0$ a čitateľ tam má jednoduchú nulu, funkcia má jednoduchý pól v $z = 0$. Vypočítajme tam rezíduum.

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{\sin z}{z^2}, z = 0\right) &= \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} \\ &= \lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{1} \\ &= 1\end{aligned}$$

(c)

$$\frac{1+z^2}{z(z-1)^2}$$

Jednoduchý pól je v $z = 0$ a dvojnásobný pól je v $z = 1$.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1+z^2}{z(z-1)^2}, z = 0\right) = \left.\frac{1+z^2}{(z-1)^2}\right|_{z=0} = 1$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{1+z^2}{z(z-1)^2}, z = 1\right) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1+z^2}{z}\right|_{z=1} \\ &= \left.\left(1-\frac{1}{z^2}\right)\right|_{z=1} \\ &= 0\end{aligned}$$

(d) $\mathrm{e}^z / \left(z^2 + a^2\right)$ má jednoduché póly v $z = \pm\imath a$. Vypočítajme v nich rezíduá.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^z}{z^2+a^2}, z = \imath a\right) = \left.\frac{\mathrm{e}^z}{z+\imath a}\right|_{z=\imath a} = -\frac{\imath\,\mathrm{e}^{\imath a}}{2a}$$
$$\operatorname{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^z}{z^2+a^2}, z = -\imath a\right) = \left.\frac{\mathrm{e}^z}{z-\imath a}\right|_{z=-\imath a} = \frac{\imath\,\mathrm{e}^{-\imath a}}{2a}$$

(e) Keďže $1 - \cos z$ má dvojnásobnú nulu v $z = 0$, $\frac{(1-\cos z)^2}{z^7}$ má trojnásobný pól v tom bode. Rezíduum nájdeme rozvojom funkcie do

Laurentovho radu.

$$
\begin{aligned}
\frac{(1-\cos z)^2}{z^7} &= z^{-7}\left(1-\left(1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}+\mathcal{O}\left(z^6\right)\right)\right)^2 \\
&= z^{-7}\left(\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{24}+\mathcal{O}\left(z^6\right)\right)^2 \\
&= z^{-7}\left(\frac{z^4}{4}-\frac{z^6}{24}+\mathcal{O}\left(z^8\right)\right) \\
&= \frac{1}{4z^3}-\frac{1}{24z}+\mathcal{O}(z)
\end{aligned}
$$

Rezíduum v $z=0$ je $-1/24$.

**Riešenie 7.4**

Keďže $f(z)$ má $n$-násobný izolovaný pól v $z=z_0$, má Laurentov rozvoj ktorý je konvergentný na okolí tohto bodu, okrem samotného bodu. Substituujme tento Laurentov rad do vzťahu pre rezíduá aby sme to overili.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f(z),z_0) &= \lim_{z\to z_0}\left(\frac{1}{(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]\right) \\
&= \lim_{z\to z_0}\left(\frac{1}{(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left[(z-z_0)^n\sum_{k=-n}^{\infty}a_k(z-z_0)^k\right]\right) \\
&= \lim_{z\to z_0}\left(\frac{1}{(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}a_{k-n}(z-z_0)^k\right]\right) \\
&= \lim_{z\to z_0}\left(\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=n-1}^{\infty}a_{k-n}\frac{k!}{(k-n+1)!}(z-z_0)^{k-n+1}\right) \\
&= \lim_{z\to z_0}\left(\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{\infty}a_{k-1}\frac{(k+n-1)!}{k!}(z-z_0)^k\right) \\
&= \frac{1}{(n-1)!}a_{-1}\frac{(n-1)!}{0!} \\
&= a_{-1}
\end{aligned}
$$

To dokazuje vzťah pre rezíduá.

**Riešenie 7.5**
**Klasifikujte singularity.**

$$f(z) = \frac{z^4}{z^2+1} = \frac{z^4}{(z-\imath)(z+\imath)}.$$

Jednoduché póly sú v $z = \pm\imath$. Keďže sa funkcia správa v nekonečne ako $z^2$, existuje tam dvojnásobný pól. Aby sme to videli pomalšie, môžeme urobiť substitúciu $z = 1/\zeta$ a vyšetriť bod $\zeta = 0$.

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{\zeta^{-4}}{\zeta^{-2}+1} = \frac{1}{\zeta^2+\zeta^4} = \frac{1}{\zeta^2(1+\zeta^2)}$$

$f(1/\zeta)$ má dvojnásobný pól v $\zeta = 0$, čo znamená že $f(z)$ má dvojnásobný pól v nekonečne.
**Rezíduá.** Rezíduá v $z = \pm\imath$ sú,

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^4}{z^2+1}, \imath\right) = \lim_{z\to\imath}\frac{z^4}{z+\imath} = -\frac{\imath}{2},$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^4}{z^2+1}, -\imath\right) = \lim_{z\to-\imath}\frac{z^4}{z-\imath} = \frac{\imath}{2}.$$

Rezíduum v nekonečne je

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f(z),\infty) &= \operatorname{Res}\left(\frac{-1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right), \zeta = 0\right)\\ &= \operatorname{Res}\left(\frac{-1}{\zeta^2}\frac{\zeta^{-4}}{\zeta^{-2}+1}, \zeta = 0\right)\\ &= \operatorname{Res}\left(-\frac{\zeta^{-4}}{1+\zeta^2}, \zeta = 0\right)\end{aligned}$$

Tu sme mohli použiť vzorec pre rezíduá, ale je jednoduchšie nájsť Laurentov rad.

$$\begin{aligned}&= \operatorname{Res}\left(-\zeta^{-4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\zeta^{2n}, \zeta = 0\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

Tiež sme mohli vypočítať rezíduum v nekonečne využitím faktu že súčet všetkých rezíduí tejto funkcie v rozšírenej komplexnej rovine je nula.

$$\frac{-\imath}{2} + \frac{\imath}{2} + \operatorname{Res}(f(z),\infty) = 0$$

$$\mathrm{Res}(f(z), \infty) = 0$$

**Laurentov rad v $\mathbf{z = 0}$.** Keďže najbližšia singularita je v $z = \pm\imath$, Taylorov rad konverguje v disku $|z| < 1$.

$$\begin{aligned}
\frac{z^4}{z^2+1} &= z^4 \frac{1}{1-(-z)^2} \\
&= z^4 \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n \\
&= z^4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n z^{2n}
\end{aligned}$$

Geometrický rad konverguje pre $|-z^2| < 1$, alebo $|z| < 1$. Rozvoj funkcie do radu je

$$\boxed{\frac{z^4}{z^2+1} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad \text{pre } |z| < 1}$$

**Laurentov rad v $\mathbf{z = \imath}$.** Rozložme $f(z)$ na parciálne zlomky. Najprv napíšme funkciu ako vlastnú racionálnu funkciu, (t.j. čitateľ má nižší stupeň ako menovateľ). Polynomickým delením vidíme že

$$f(z) = z^2 - 1 + \frac{1}{z^2+1}.$$

Teraz rozložme posledný člen na parciálne zlomky.

$$f(z) = z^2 - 1 + \frac{-\imath/2}{z-\imath} + \frac{\imath/2}{z+\imath}$$

Keďže najbližšia singularita je v $z = -\imath$, Laurentov rad konverguje v prstenci $0 < |z - \imath| < 2$.

$$\begin{aligned}
z^2 - 1 &= ((z-\imath) + \imath)^2 - 1 \\
&= (z-\imath)^2 + \imath 2(z-\imath) - 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\imath/2}{z+\imath} &= \frac{\imath/2}{\imath 2 + (z-\imath)} \\
&= \frac{1/4}{1-\imath(z-\imath)/2} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\imath(z-\imath)}{2}\right)^n \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\imath^n}{2^n}(z-\imath)^n
\end{aligned}$$

Tento geometrický rad konverguje pre $|\imath(z-\imath)/2| < 1$, alebo $|z-\imath| < 2$. Rozvoj do radu funkcie $f(z)$ je

$$f(z) = \frac{-\imath/2}{z-\imath} - 2 + \imath 2(z-\imath) + (z-\imath)^2 + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\imath^n}{2^n}(z-\imath)^n.$$

$$\boxed{\frac{z^4}{z^2+1} = \frac{-\imath/2}{z-\imath} - 2 + \imath 2(z-\imath) + (z-\imath)^2 + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\imath^n}{2^n}(z-\imath)^n \quad \text{pre } |z-\imath| < 2}$$

**Laurentov rad v $\mathbf{z} = \infty$.** Keďže najbližšie singularity sú v $z = \pm\imath$, Laurentov rad konverguje v prstenci $1 < |z| < \infty$.

$$\begin{aligned}
\frac{z^4}{z^2+1} &= \frac{z^2}{1+1/z^2} \\
&= z^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z^2}\right)^n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{0}(-1)^n z^{2(n+1)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{1}(-1)^{n+1} z^{2n}
\end{aligned}$$

Tento geometrický rad konverguje pre $|-1/z^2| < 1$, alebo $|z| > 1$. Rozvoj do radu funkcie $f(z)$ je

$$\boxed{\frac{z^4}{z^2+1} = \sum_{n=-\infty}^{1}(-1)^{n+1} z^{2n} \quad \text{pre } 1 < |z| < \infty}$$

**Riešenie 7.6**
**Metóda 1: Teoréma o rezíduách.** Rozložíme $P(z)$. Nech $m$ je počet koreňov, počítajúc násobnosti, ktoré ležia vo vnútri krivky $\Gamma$. Nájdime jednoduchý výraz pre $P'(z)/P(z)$.

$$P(z) = c\prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$$
$$P'(z) = c\sum_{k=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(z - z_j)$$

$$\begin{aligned}\frac{P'(z)}{P(z)} &= \frac{c\sum_{k=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(z - z_j)}{c\prod_{k=1}^{n}(z - z_k)}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(z - z_j)}{\prod_{j=1}^{n}(z - z_j)}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z - z_k}\end{aligned}$$

Teraz prevedieme integrovanie pomocou teorémy o rezíduách.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\imath 2\pi}\int_\Gamma \frac{P'(z)}{P(z)}\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{\imath 2\pi}\int_\Gamma \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z - z_k}\,\mathrm{d}z\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\imath 2\pi}\int_\Gamma \frac{1}{z - z_k}\,\mathrm{d}z\\ &= \sum_{z_k \text{ inside } \Gamma}\frac{1}{\imath 2\pi}\int_\Gamma \frac{1}{z - z_k}\,\mathrm{d}z\\ &= \sum_{z_k \text{ inside } \Gamma} 1\\ &= m\end{aligned}$$

**Metóda 2: Newton-Leibnizova formula.** Rozložme polynóm, $P(z) = c\prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$. Nech $m$ je počet koreňov, počítajúc násobnosti, ktoré ležia vo vnútri krivky $\Gamma$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\imath 2\pi}\int_\Gamma \frac{P'(z)}{P(z)}\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{\imath 2\pi}\left[\log P(z)\right]_C \\ &= \frac{1}{\imath 2\pi}\left[\log \prod_{k=1}^{n}(z-z_k)\right]_C \\ &= \frac{1}{\imath 2\pi}\left[\sum_{k=1}^{n}\log(z-z_k)\right]_C\end{aligned}$$

Hodnota logaritmu sa zmení o $\imath 2\pi$ pre členy v ktorých $z_k$ je vo vnútri krivky. Jeho hodnota sa nezmení pre členy v ktorých $z_k$ je zvonku krivky.

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{\imath 2\pi}\left[\sum_{z_k \text{ zvnútra } \Gamma}\log(z-z_k)\right]_C \\ &= \frac{1}{\imath 2\pi}\sum_{z_k \text{ zvnútra } \Gamma}\imath 2\pi \\ &= m\end{aligned}$$

**Riešenie 7.7**
(a)

$$\oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{(z-\pi)\tan z}\,\mathrm{d}z = \oint_C \frac{\mathrm{e}^z\cos z}{(z-\pi)\sin z}\,\mathrm{d}z$$

Integrand má jednoduché póly v $z = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 1$ a dvojnásobný pól v $z = \pi$. Jediný pól vo vnútri krivky je v $z = 0$. Vyhodnoťme integrál pomocou teorémy o rezíduách.

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{\mathrm{e}^z \cos z}{(z-\pi)\sin z} \, \mathrm{d}z &= \imath 2\pi \operatorname{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^z \cos z}{(z-\pi)\sin z}, z = 0\right) \\
&= \imath 2\pi \lim_{z=0} z \frac{\mathrm{e}^z \cos z}{(z-\pi)\sin z} \\
&= -\imath 2 \lim_{z=0} \frac{z}{\sin z} \\
&= -\imath 2 \lim_{z=0} \frac{1}{\cos z} \\
&= -\imath 2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{(z-\pi)\tan z} \, \mathrm{d}z = -\imath 2}$$

(b) Integrand má jednoduché póly v $z = 0, -\pi$ a dvojnásobný pól v $z = \pi$ vo vnútri krivky. Hodnota integrálu je $\imath 2\pi$ krát súčet rezíduí v týchto bodoch. Z predchádzajúcej časti vieme že rezíduum v $z = 0$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^z \cos z}{(z-\pi)\sin z}, z = 0\right) = -\frac{1}{\pi}.$$

Nájdeme rezíduum v $z = -\pi$ pomocou vzťahu pre reziduá.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^z \cos z}{(z-\pi)\sin z}, z = -\pi\right) &= \lim_{z \to -\pi} (z+\pi) \frac{\mathrm{e}^z \cos z}{(z-\pi)\sin z} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\pi}(-1)}{-2\pi} \lim_{z \to -\pi} \frac{z+\pi}{\sin z} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\pi}}{2\pi} \lim_{z \to -\pi} \frac{1}{\cos z} \\
&= -\frac{\mathrm{e}^{-\pi}}{2\pi}
\end{aligned}$$

Nájdeme rezíduum v $z=\pi$ pomocou nájdenia niekoľko prvých členov Laurentovho radu z integrandu.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{e}^z\cos z}{(z-\pi)\sin z} &= \frac{\left(\mathrm{e}^\pi+\mathrm{e}^\pi(z-\pi)+\mathcal{O}\left((z-\pi)^2\right)\right)\left(1+\mathcal{O}\left((z-\pi)^2\right)\right)}{(z-\pi)\left(-(z-\pi)+\mathcal{O}\left((z-\pi)^3\right)\right)}\\
&= \frac{-\mathrm{e}^\pi-\mathrm{e}^\pi(z-\pi)+\mathcal{O}\left((z-\pi)^2\right)}{-(z-\pi)^2+\mathcal{O}\left((z-\pi)^4\right)}\\
&= \frac{\frac{\mathrm{e}^\pi}{(z-\pi)^2}+\frac{\mathrm{e}^\pi}{z-\pi}+\mathcal{O}(1)}{1+\mathcal{O}\left((z-\pi)^2\right)}\\
&= \left(\frac{\mathrm{e}^\pi}{(z-\pi)^2}+\frac{\mathrm{e}^\pi}{z-\pi}+\mathcal{O}(1)\right)\left(1+\mathcal{O}\left((z-\pi)^2\right)\right)\\
&= \frac{\mathrm{e}^\pi}{(z-\pi)^2}+\frac{\mathrm{e}^\pi}{z-\pi}+\mathcal{O}(1)
\end{aligned}$$

Teraz vidíme že

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^z\cos z}{(z-\pi)\sin z}, z=\pi\right)=\mathrm{e}^\pi\,.$$

Integrál je

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{\mathrm{e}^z\cos z}{(z-\pi)\sin z}\,\mathrm{d}z &= \imath 2\pi\Bigg(\operatorname{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^z\cos z}{(z-\pi)\sin z}, z=-\pi\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^z\cos z}{(z-\pi)\sin z}, z=0\right)\\
&\qquad+\operatorname{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^z\cos z}{(z-\pi)\sin z}, z=\pi\right)\Bigg)\\
&= \imath 2\pi\left(-\frac{1}{\pi}-\frac{\mathrm{e}^{-\pi}}{2\pi}+\mathrm{e}^\pi\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{(z-\pi)\tan z}\,\mathrm{d}z = \imath\left(2\pi\,\mathrm{e}^\pi-2-\mathrm{e}^{-\pi}\right)}$$

**Riešenie 7.8**

(a) Najprv si všimnime že integrand je párnou funkciou a rozšírme oblasť integrovania.

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$$

ďalej uzavrime integračnú cestu v hornej polrovine. Uvažujme integrál pozdĺž hranice oblasti $0 < r < R$, $0 < \theta < \pi$.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_C \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} \,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2} \int_C \frac{z^2}{(z-\imath)(z+\imath)(z-\imath 2)(z+\imath 2)} \,\mathrm{d}z \\
&= \imath 2\pi \frac{1}{2} \Bigg( \operatorname{Res}\left( \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}, z = \imath \right) \\
&\qquad + \operatorname{Res}\left( \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}, z = \imath 2 \right) \Bigg) \\
&= \imath\pi \left( \left. \frac{z^2}{(z+\imath)(z^2+4)} \right|_{z=\imath} + \left. \frac{z^2}{(z^2+1)(z+\imath 2)} \right|_{z=\imath 2} \right) \\
&= \imath\pi \left( \frac{\imath}{6} - \frac{\imath}{3} \right) \\
&= \frac{\pi}{6}
\end{aligned}
$$

Nech $C_R$ je časť krivky v tvare kružnicového oblúka. $\int_C = \int_{-R}^{R} + \int_{C_R}$. Ukážeme že integrál pozdĺž $C_R$ ide k nule pre $R \to \infty$ pomocou hornej hranice modulu.

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{C_R} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} \,\mathrm{d}z \right| &\leq \pi R \max_{z \in C_R} \left| \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} \right| \\
&= \pi R \frac{R^2}{(R^2-1)(R^2-4)} \\
&\to 0 \text{ as } R \to \infty
\end{aligned}
$$

Vezmeme limitu pre $R \to \infty$ a vyhodnotíme integrál pozdĺž reálnej osi.

$$
\begin{gathered}
\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2} \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6} \\
\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}
\end{gathered}
$$

(b) Uzavrieme integračnú cestu v hornej polrovine. Uvažujme integrál pozdĺž hranice oblasti $0 < r < R$, $0 < \theta < \pi$.

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z+b)^2+a^2} &= \int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z+b-\imath a)(z+b+\imath a)} \\
&= \imath 2\pi \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z+b-\imath a)(z+b+\imath a)}, z = -b+\imath a\right) \\
&= \imath 2\pi \left.\frac{1}{z+b+\imath a}\right|_{z=-b+\imath a} \\
&= \frac{\pi}{a}
\end{aligned}$$

Nech $C_R$ je časť krivky v tvare kružnicového oblúka. $\int_C = \int_{-R}^{R} + \int_{C_R}$. Ukážeme že integrál pozdĺž $C_R$ ide k nule pre $R \to \infty$ pomocou hornej hranice modulu.

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{(z+b)^2+a^2}\right| &\leq \pi R \max_{z \in C_R} \left|\frac{1}{(z+b)^2+a^2}\right| \\
&= \pi R \frac{1}{(R-b)^2+a^2} \\
&\to 0 \text{ pre } R \to \infty
\end{aligned}$$

Vezmeme limitu pre $R \to \infty$ a vyhodnotíme integrál pozdĺž reálnej osi.

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{(x+b)^2+a^2} = \frac{\pi}{a}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+b)^2+a^2} = \frac{\pi}{a}$$

**Riešenie 7.9**

Uvažujme funkciu

$$f(z) = \frac{z^6}{(z^4+1)^2}.$$

Hodnota funkcie na imaginárnej osi:

$$\frac{-y^6}{(y^4+1)^2}$$

je konštantný násobok hodnoty funkcie na reálnej osi:

$$\frac{x^6}{(x^4+1)^2}.$$

Na vyhodnotenie reálneho integrálu, uvažujme integračnú krivku $C$, ktorá začína v počiatku, ide po reálnej osi do $R$, potom po kružnici do $\imath R$ a potom kopíruje imaginárnu os naspäť dole do počiatku. $f(z)$ má dvojnásobné póly v štvrtých odmocninách z $-1$: $(\pm 1 \pm \imath)/\sqrt{2}$. Z nich len $(1+\imath)/\sqrt{2}$ leží vo vnútri integračnej cesty. Vyhodnoťme krivkový integrál pomocou teorémy o rezíduách. Pre $R > 1$:

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{z^6}{(z^4+1)^2} \,\mathrm{d}z &= \imath 2\pi \operatorname{Res}\left(\frac{z^6}{(z^4+1)^2}, z = \mathrm{e}^{\imath\pi/4}\right) \\
&= \imath 2\pi \lim_{z \to \mathrm{e}^{\imath\pi/4}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left((z-\mathrm{e}^{\imath\pi/4})^2 \frac{z^6}{(z^4+1)^2}\right) \\
&= \imath 2\pi \lim_{z \to \mathrm{e}^{\imath\pi/4}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z^6}{(z-\mathrm{e}^{\imath 3\pi/4})^2(z-\mathrm{e}^{\imath 5\pi/4})^2(z-\mathrm{e}^{\imath 7\pi/4})^2}\right) \\
&= \imath 2\pi \lim_{z \to \mathrm{e}^{\imath\pi/4}} \left(\frac{z^6}{(z-\mathrm{e}^{\imath 3\pi/4})^2(z-\mathrm{e}^{\imath 5\pi/4})^2(z-\mathrm{e}^{\imath 7\pi/4})^2}\right. \\
&\qquad \left.\left(\frac{6}{z} - \frac{2}{z-\mathrm{e}^{\imath 3\pi/4}} - \frac{2}{z-\mathrm{e}^{\imath 5\pi/4}} - \frac{2}{z-\mathrm{e}^{\imath 7\pi/4}}\right)\right) \\
&= \imath 2\pi \frac{-\imath}{(2)(\imath 4)(-2)}\left(\frac{6\sqrt{2}}{1+\imath} - \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{2+\imath 2} - \frac{2}{\imath\sqrt{2}}\right) \\
&= \imath 2\pi \frac{3}{32}(1-\imath)\sqrt{2} \\
&= \frac{3\pi}{8\sqrt{2}}(1+\imath)
\end{aligned}$$

Integrál pozdĺž kružnicovej časti krivky, $C_R$, ide k nule pre $R \to \infty$. Demonštrujme to pomocou hornej hranice modulu integrálu.

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_R} \frac{z^6}{(z^4+1)^2} \,\mathrm{d}z\right| &\leq \frac{\pi R}{4} \max_{z \in C_R}\left(\frac{z^6}{(z^4+1)^2}\right) \\
&= \frac{\pi R}{4} \frac{R^6}{(R^4-1)^2} \\
&\to 0 \text{ as } R \to \infty
\end{aligned}$$

Ak vezmeme limitu pre $R \to \infty$, dostaneme:

$$\int_0^\infty \frac{x^6}{(x^4+1)^2}\,\mathrm{d}x + \int_\infty^0 \frac{(\imath y)^6}{((\imath y)^4+1)^2}\,\imath\,\mathrm{d}y = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}}(1+\imath)$$
$$\int_0^\infty \frac{x^6}{(x^4+1)^2}\,\mathrm{d}x + \imath\int_0^\infty \frac{y^6}{(y^4+1)^2}\,\mathrm{d}y = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}}(1+\imath)$$
$$(1+\imath)\int_0^\infty \frac{x^6}{(x^4+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}}(1+\imath)$$
$$\boxed{\int_0^\infty \frac{x^6}{(x^4+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}}}$$

**Riešenie 7.10**
Vieme že

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta < \frac{\pi}{R}.$$

Najprv uvažujme prípad že $\omega$ je kladné a polkružnica v hornej polrovine.

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{e}^{\imath\omega z}\,\mathrm{d}z\right| &\leq \left|\int_{C_R} \mathrm{e}^{\imath\omega z}\,\mathrm{d}z\right| \max_{z\in C_R}|f(z)| \\
&\leq \int_0^\pi \left|\mathrm{e}^{\imath\omega R\,\mathrm{e}^{\imath\theta}}\,R\,\mathrm{e}^{\imath\theta}\right|\,\mathrm{d}\theta \max_{z\in C_R}|f(z)| \\
&= R\int_0^\pi \left|\mathrm{e}^{-\omega R\sin\theta}\right|\,\mathrm{d}\theta \max_{z\in C_R}|f(z)| \\
&< R\frac{\pi}{\omega R}\max_{z\in C_R}|f(z)| \\
&= \frac{\pi}{\omega}\max_{z\in C_R}|f(z)| \\
&\to 0 \quad \text{pre } R\to\infty
\end{aligned}$$

Postup je takmer rovnaký pre záporné $\omega$.

**Riešenie 7.11**
Najprv napíšme integrál pomocou Fourierových integrálov.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos 2x}{x-\imath\pi}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{\imath 2x}}{2(x-\imath\pi)}\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\imath 2x}}{2(x-\imath\pi)}\,\mathrm{d}x$$

Poznamenajme že $\frac{1}{2(z-\imath\pi)}$ ide k nule pre $|z| \to \infty$. Uzavrieme prvý Fourierov integrál v hornej polrovine a druhý v dolnej polrovine. Jednoduchý pól sa nachádza v $z = \imath\pi$ v hornej polrovine.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\imath 2x}}{2(x-\imath\pi)}\,\mathrm{d}x &= \imath 2\pi \operatorname{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^{\imath 2z}}{2(z-\imath\pi)}, z = \imath\pi\right) \\ &= \imath 2\pi \frac{\mathrm{e}^{-2\pi}}{2}\end{aligned}$$

Neexistujú žiadne singularity v dolnej polrovine.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\imath 2x}}{2(x-\imath\pi)}\,\mathrm{d}x = 0$$

Teda hodnota pôvodného reálneho integrálu je

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x-\imath\pi}\,\mathrm{d}x = \imath\pi\,\mathrm{e}^{-2\pi}}$$

**Riešenie 7.12**
Chceme vyhodnotiť

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}.$$

Nech krivka $C$ je hranicou oblasti $0 < r < R$, $0 < \theta < 2\pi/3$. Rozložme menovateľ integrandu a zistíme že krivka obieha jednoduchý pól v $\mathrm{e}^{\imath\pi/3}$ pre $R > 1$.

$$z^3 + 1 = (z - \mathrm{e}^{\imath\pi/3})(z+1)(z - \mathrm{e}^{-\imath\pi/3})$$

Vypočítajme rezíduum v tom bode.

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3+1}, z = \mathrm{e}^{\imath\pi/3}\right) &= \lim_{z\to\mathrm{e}^{\imath\pi/3}}\left((z-\mathrm{e}^{\imath\pi/3})\frac{1}{z^3+1}\right) \\ &= \lim_{z\to\mathrm{e}^{\imath\pi/3}}\left(\frac{1}{(z+1)(z-\mathrm{e}^{-\imath\pi/3})}\right) \\ &= \frac{1}{(\mathrm{e}^{\imath\pi/3}+1)(\mathrm{e}^{\imath\pi/3}-\mathrm{e}^{-\imath\pi/3})} \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{\imath\pi/3}}{3}\end{aligned}$$

Na výpočet integrálu použijeme teorému o rezíduách.

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^3+1} = -\frac{\imath 2\pi\, \mathrm{e}^{\imath\pi/3}}{3}$$

Nech $C_R$ je kružnicová časť krivky.

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^3+1} &= \int_0^R \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} + \int_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^3+1} - \int_0^R \frac{\mathrm{e}^{\imath 2\pi/3}\,\mathrm{d}x}{x^3+1} \\ &= (1+\mathrm{e}^{-\imath\pi/3}) \int_0^R \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} + \int_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^3+1}\end{aligned}$$

Ukážeme že integrál pozdĺž $C_R$ ide k nule pre $R \to \infty$ pomocou horného ohraničenia modulu integrálu.

$$\left| \int_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^3+1} \right| \leq \frac{2\pi R}{3} \frac{1}{R^3-1} \to 0 \quad \text{as } R \to \infty$$

Vezmime $R \to \infty$ a riešme pre daný integrál.

$$\left(1+\mathrm{e}^{-\imath\pi/3}\right) \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} = -\frac{\imath 2\pi\, \mathrm{e}^{\imath\pi/3}}{3}$$
$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

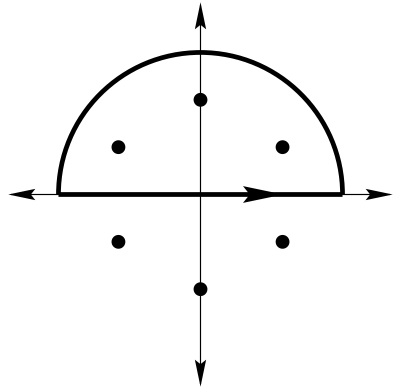
**Riešenie 7.13**
**Metóda 1: Integračná cesta - polkružnica.** Chceme vypočítať integrál

$$I = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^6}.$$

Poznamenajme že integrand je párnou funkciou a vyjadrime $I$ ako integrál pozdĺž celej reálnej osi.

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^6}$$

Teraz vypočítame integrál pomocou krivkového integrálu. Uzavrieme integračnú cestu v hornej polrovine. Nech $\Gamma_R$ je polkružnicový oblúk od $R$ do $-R$ v hornej polrovine. Nech $\Gamma$ je zjednotenie $\Gamma_R$ a intervalu $[-R, R]$. (Viď obr. 7.2.)



Obr. 7.2: Integračná cesta - polkružnica.

Integrál pozdĺž $\Gamma$ vypočítame pomocou teorémy o rezíduách. Integrand má jednoduché póly v $z = \mathrm{e}^{\imath\pi(1+2k)/6}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Tri z nich sú v hornej polrovine. Pre $R > 1$, máme

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \frac{1}{z^6+1}\,\mathrm{d}z &= \imath 2\pi \sum_{k=0}^{2} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^6+1}, \mathrm{e}^{\imath\pi(1+2k)/6}\right) \\ &= \imath 2\pi \sum_{k=0}^{2} \lim_{z\to \mathrm{e}^{\imath\pi(1+2k)/6}} \frac{z - \mathrm{e}^{\imath\pi(1+2k)/6}}{z^6+1}\end{aligned}$$

Keďže čitateľ a menovateľ idú k nule, použijeme L'Hospitalovo pravidlo.

$$
\begin{aligned}
&= \imath 2\pi \sum_{k=0}^{2} \lim_{z \to e^{\imath\pi(1+2k)/6}} \frac{1}{6z^5} \\
&= \frac{\imath\pi}{3} \sum_{k=0}^{2} e^{-\imath\pi 5(1+2k)/6} \\
&= \frac{\imath\pi}{3} \left( e^{-\imath\pi 5/6} + e^{-\imath\pi 15/6} + e^{-\imath\pi 25/6} \right) \\
&= \frac{\imath\pi}{3} \left( e^{-\imath\pi 5/6} + e^{-\imath\pi/2} + e^{-\imath\pi/6} \right) \\
&= \frac{\imath\pi}{3} \left( \frac{-\sqrt{3} - \imath}{2} - \imath + \frac{\sqrt{3} - \imath}{2} \right) \\
&= \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}
$$

Teraz vyšetríme integrál pozdĺž $\Gamma_R$. Použijeme horné ohraničenie modulu integrálu a ukážeme že hodnota integrálu ide k nule pre $R \to \infty$.

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^6 + 1} \, dz \right| &\leq \pi R \max_{z \in \Gamma_R} \left| \frac{1}{z^6 + 1} \right| \\
&= \pi R \frac{1}{R^6 - 1} \\
&\to 0 \quad \text{as } R \to \infty.
\end{aligned}
$$

Teraz už môžeme vyhodnotiť pôvodny reálny integrál.

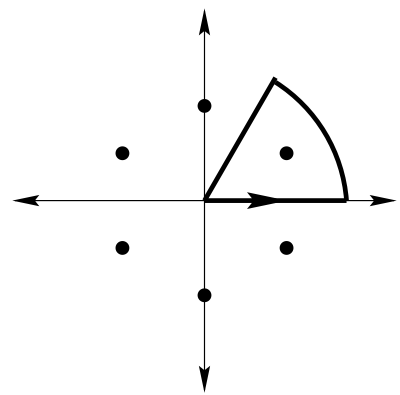
$$
\begin{gathered}
\int_{\Gamma} \frac{1}{z^6 + 1} \, dz = \frac{2\pi}{3} \\
\int_{-R}^{R} \frac{1}{x^6 + 1} \, dx + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^6 + 1} \, dz = \frac{2\pi}{3}
\end{gathered}
$$

Vezmeme limitu pre $R \to \infty$.

$$
\begin{gathered}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6 + 1} \, dx = \frac{2\pi}{3} \\
\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^6 + 1} \, dx = \frac{\pi}{3}
\end{gathered}
$$

Rovnaký výsledok by sme dostali keby sme uzavreli cestu v dolnej polrovine. Poznamenajme že v takom prípade by uzavretá krivka bola záporne orientovaná.

**Method 2: Integračná cesta - kružnicový výsek.** Uvažujme krivku $\Gamma$, ktorá začína v počiatku, ide k bodu $R$ pozdĺž reálnej osi, potom k bodu $R\,\mathrm{e}^{\imath\pi/3}$ pozdĺž kružnice o polomere $R$ a potom naspat do počiatku pozdĺž lúča $\theta = \pi/3$. (Viď obr. 7.3.)



Obr. 7.3: Integračná cesta - kružnicový výsek.

Integrál pozdĺž $\Gamma$ vypočítame pomocou teorémy o rezíduách. Integrand má jeden jednoduchý pól vo vnútri krivky v $z = \mathrm{e}^{\imath\pi/6}$. Pre $R > 1$, máme

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \frac{1}{z^6+1}\,\mathrm{d}z &= \imath 2\pi \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^6+1}, \mathrm{e}^{\imath\pi/6}\right)\\ &= \imath 2\pi \lim_{z\to\mathrm{e}^{\imath\pi/6}} \frac{z-\mathrm{e}^{\imath\pi/6}}{z^6+1}\end{aligned}$$

Keďže čitateľ a menovateľ idú k nule, použijeme L'Hospitalovo pravidlo.

$$\begin{aligned}&= \imath 2\pi \lim_{z\to\mathrm{e}^{\imath\pi/6}} \frac{1}{6z^5}\\ &= \frac{\imath\pi}{3}\,\mathrm{e}^{-\imath\pi 5/6}\\ &= \frac{\pi}{3}\,\mathrm{e}^{-\imath\pi/3}\end{aligned}$$

Teraz vyšetríme integrál pozdĺž kružnicového oblúka $\Gamma_R$. Použijeme horné ohraničenie modulu integrálu a ukážeme že hodnota integrálu ide k nule pre $R \to \infty$.

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^6+1}\,\mathrm{d}z\right| &\leq \frac{\pi R}{3} \max_{z \in \Gamma_R} \left|\frac{1}{z^6+1}\right| \\ &= \frac{\pi R}{3} \frac{1}{R^6-1} \\ &\to 0 \quad \text{as } R \to \infty.\end{aligned}$$

Teraz už môžeme vyhodnotiť pôvodny reálny integrál.

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z^6+1}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{3}\,\mathrm{e}^{-\imath\pi/3}$$
$$\int_0^R \frac{1}{x^6+1}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^6+1}\,\mathrm{d}z + \int_{R\,\mathrm{e}^{\imath\pi/3}}^0 \frac{1}{z^6+1}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{3}\,\mathrm{e}^{-\imath\pi/3}$$
$$\int_0^R \frac{1}{x^6+1}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^6+1}\,\mathrm{d}z + \int_R^0 \frac{1}{x^6+1}\,\mathrm{e}^{\imath\pi/3}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}\,\mathrm{e}^{-\imath\pi/3}$$

Vezmeme limitu pre $R \to \infty$.

$$\left(1-\mathrm{e}^{\imath\pi/3}\right)\int_0^\infty \frac{1}{x^6+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}\,\mathrm{e}^{-\imath\pi/3}$$
$$\int_0^\infty \frac{1}{x^6+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}\frac{\mathrm{e}^{-\imath\pi/3}}{1-\mathrm{e}^{\imath\pi/3}}$$
$$\int_0^\infty \frac{1}{x^6+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}\frac{(1-\imath\sqrt{3})/2}{1-(1+\imath\sqrt{3})/2}$$
$$\int_0^\infty \frac{1}{x^6+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}$$

**Riešenie 7.14**

(a) Pre výpočet integrálu urobme substitúciu $z = \mathrm{e}^{\imath\theta}$. Integračná cesta v komplexnej rovine je kladne orientovaná jednotková kružnica.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta} &= \int_C \frac{1}{1-\left(z-z^{-1}\right)^2/4} \frac{\mathrm{d}z}{\imath z} \\ &= \int_C \frac{\imath 4z}{z^4-6z^2+1}\,\mathrm{d}z \\ &= \int_C \frac{\imath 4z}{\left(z-1-\sqrt{2}\right)\left(z-1+\sqrt{2}\right)\left(z+1-\sqrt{2}\right)\left(z+1+\sqrt{2}\right)}\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Jednoduché póly sú v $z = \pm 1 \pm \sqrt{2}$. Póly v $z = -1+\sqrt{2}$ a $z = 1-\sqrt{2}$ sú vo vnútri integračnéj cesty. Integrál vypočítame pomocou vzťahu pre rezíduá.

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\imath 4z}{z^4-6z^2+1}\,\mathrm{d}z &= \imath 2\pi\Bigg(\operatorname{Res}\left(\frac{\imath 4z}{z^4-6z^2+1}, z=-1+\sqrt{2}\right) \\ &\qquad + \operatorname{Res}\left(\frac{\imath 4z}{z^4-6z^2+1}, z=1-\sqrt{2}\right)\Bigg) \\ &= -8\pi\Bigg(\left.\frac{z}{\left(z-1-\sqrt{2}\right)\left(z-1+\sqrt{2}\right)\left(z+1+\sqrt{2}\right)}\right|_{z=-1+\sqrt{2}} \\ &\qquad + \left.\frac{z}{\left(z-1-\sqrt{2}\right)\left(z+1-\sqrt{2}\right)\left(z+1+\sqrt{2}\right)}\right|_{z=1-\sqrt{2}}\Bigg) \\ &= -8\pi\left(-\frac{1}{8\sqrt{2}} - \frac{1}{8\sqrt{2}}\right) \\ &= \sqrt{2}\pi\end{aligned}$$

(b) Najprv využijeme symetriu na rozšírenie integračnej oblasti.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta$$

Potom prevedieme substitúciu $z = \mathrm{e}^{\imath\theta}$. Integračná cesta v komplexnej rovine je kladne orientovaná jednotková kružnica. Integrál vypočítame pomocou teoréme o rezíduách.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin^4\theta \,\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{4}\int_C \frac{1}{16}\left(z-\frac{1}{z}\right)^4 \frac{\mathrm{d}z}{\imath z} \\
&= \frac{1}{64}\int_C -\imath\frac{(z^2-1)^4}{z^5}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{-\imath}{64}\int_C \left(z^3-4z+\frac{6}{z}-\frac{4}{z^3}+\frac{1}{z^5}\right)\mathrm{d}z \\
&= \imath 2\pi \frac{-\imath}{64} 6 \\
&= \frac{3\pi}{16}
\end{aligned}
$$

**Riešenie 7.15**

(a) Nech $C$ je kladne orientovaná jednotková kružnica v počiatku. Parametrizujme túto krivku.

$$
z = \mathrm{e}^{\imath\theta}, \quad \mathrm{d}z = \imath\,\mathrm{e}^{\imath\theta}\,\mathrm{d}\theta, \quad \theta \in (0\ldots 2\pi)
$$

Napíšme $\sin\theta$ a deriváciu $\mathrm{d}\theta$ pomocou $z$. Potom integrál vypočítame pomocou teorémy o rezíduách.

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \oint_C \frac{1}{2+(z-1/z)/(\imath 2)}\frac{\mathrm{d}z}{\imath z} \\
&= \oint_C \frac{2}{z^2+\imath 4z-1}\,\mathrm{d}z \\
&= \oint_C \frac{2}{\left(z+\imath\left(2+\sqrt{3}\right)\right)\left(z+\imath\left(2-\sqrt{3}\right)\right)}\,\mathrm{d}z \\
&= \imath 2\pi \operatorname{Res}\left(\left(z+\imath\left(2+\sqrt{3}\right)\right)\left(z+\imath\left(2-\sqrt{3}\right)\right), z=\imath\left(-2+\sqrt{3}\right)\right) \\
&= \imath 2\pi \frac{2}{\imath 2\sqrt{3}} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

(b) Najprv uvažujme prípad $a=0$.

$$
\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\theta)\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0 & \text{pre } n\in\mathbb{Z}^+ \\ 2\pi & \text{pre } n=0 \end{cases}
$$

Teraz uvažujme $|a| < 1$, $a \neq 0$. Keďže

$$\frac{\sin(n\theta)}{1 - 2a\cos\theta + a^2}$$

je párna funkcia,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\theta)}{1 - 2a\cos\theta + a^2}\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{\imath n\theta}}{1 - 2a\cos\theta + a^2}\,\mathrm{d}\theta$$

Nech $C$ je kladne orientovaná jednotková kružnica v počiatku. Parametrizujme túto krivku.

$$z = \mathrm{e}^{\imath\theta}, \quad \mathrm{d}z = \imath\,\mathrm{e}^{\imath\theta}\,\mathrm{d}\theta, \quad \theta \in (-\pi \ldots \pi)$$

Napíšme integrand a diferenciál $\mathrm{d}\theta$ pomocou $z$. Potom integrál vypočítame pomocou teorémy o rezíduách.

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{\imath n\theta}}{1 - 2a\cos\theta + a^2}\,\mathrm{d}\theta &= \oint_C \frac{z^n}{1 - a(z + 1/z) + a^2}\,\frac{\mathrm{d}z}{\imath z} \\
&= -\imath \oint_C \frac{z^n}{-az^2 + (1 + a^2)z - a}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{\imath}{a} \oint_C \frac{z^n}{z^2 - (a + 1/a)z + 1}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{\imath}{a} \oint_C \frac{z^n}{(z - a)(z - 1/a)}\,\mathrm{d}z \\
&= \imath 2\pi \frac{\imath}{a} \operatorname{Res}\left(\frac{z^n}{(z - a)(z - 1/a)}, z = a\right) \\
&= -\frac{2\pi}{a}\,\frac{a^n}{a - 1/a} \\
&= \frac{2\pi a^n}{1 - a^2}
\end{aligned}$$

Napíšeme hodnotu integrálu pre $|a| < 1$ a $n \in \mathbb{Z}^{0+}$.

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\theta)}{1 - 2a\cos\theta + a^2}\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{pre } a = 0, n = 0 \\ \frac{2\pi a^n}{1 - a^2} & \text{ináč} \end{cases}}$$

**Riešenie 7.16**
Uvažujme integrál

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Prevedieme substitúciu $x = \sin\xi$ a dostaneme,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\xi}{(1+\sin^2\xi)\sqrt{1-\sin^2\xi}}\cos\xi\,\mathrm{d}\xi$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\xi}{1+\sin^2\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2\xi)}{3-\cos(2\xi)}\,\mathrm{d}\xi$$

$$\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos\xi}{3-\cos\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

Teraz prevedieme substitúciu $z = \mathrm{e}^{\imath\xi}$ a dostaneme krivkový integrál na jednotkovej kružnici.

$$\frac{1}{4}\int_C \frac{1-(z+1/z)/2}{3-(z+1/z)/2}\left(\frac{-\imath}{z}\right)\mathrm{d}z$$

$$\frac{-\imath}{4}\int_C \frac{(z-1)^2}{z(z-3+2\sqrt{2})(z-3-2\sqrt{2})}\,\mathrm{d}z$$

Vo vnútri krivky sa nachádzajú dva jednoduché póly. Hodnota integrálu je

$$\imath 2\pi\frac{-\imath}{4}\left(\mathrm{Res}\left(\frac{(z-1)^2}{z(z-3+2\sqrt{2})(z-3-2\sqrt{2})},0\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{(z-1)^2}{z(z-3+2\sqrt{2})(z-3-2\sqrt{2})},z=3-2\sqrt{2}\right)\right)$$

$$\frac{\pi}{2}\left(\lim_{z\to 0}\left(\frac{(z-1)^2}{(z-3+2\sqrt{2})(z-3-2\sqrt{2})}\right)+\lim_{z\to 3-2\sqrt{2}}\left(\frac{(z-1)^2}{z(z-3-2\sqrt{2})}\right)\right).$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{(2-\sqrt{2})\pi}{4}}$$

# Dodatok A

# Vzorce pre derivovanie

Poznámka: $c$ označuje konštantu a $'$ deriváciu.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}g + f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^c = cf^{c-1}f'$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g) = f'(g)g'$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(g) = f''(g)(g')^2 + f'g''$$

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(fg) = \binom{n}{0}\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}g + \binom{n}{1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} f}{\mathrm{d}x^{n-1}}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} + \binom{n}{2}\frac{\mathrm{d}^{n-2} f}{\mathrm{d}x^{n-2}}\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} + \cdots + \binom{n}{n}f\frac{\mathrm{d}^n g}{\mathrm{d}x^n}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x = \frac{1}{|x|}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} c^x = c^x \ln c$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^g = g f^{g-1} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + f^g \ln f \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x = \cos x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tan x = \sec^2 x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \csc x = -\csc x \cot x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sec x = \sec x \tan x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cot x = -\csc^2 x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad 0 \leq \arccos x \leq \pi$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \arctan x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sinh x = \cosh x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cosh x = \sinh x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tanh x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \coth x = -\operatorname{csch}^2 x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arcsinh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arccosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \qquad x > 1,\ \operatorname{arccosh} x > 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{1-x^2}, \qquad x^2 < 1$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_c^x f(\xi)\, d\xi = f(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_x^c f(\xi)\, d\xi = -f(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_g^h f(\xi, x)\, d\xi = \int_g^h \frac{\partial f(\xi, x)}{\partial x}\, d\xi + f(h, x)h' - f(g, x)g'$$

# Dodatok B

# Vzorce pre integrovanie

$$\int u \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\, dx = uv - \int v \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\, dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \log f(x)$$

$$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\, dx = \sqrt{f(x)}$$

$$\int x^{\alpha}\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad \text{for } \alpha \neq= -1$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log x$$

$$\int \mathrm{e}^{ax}\; dx = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a}$$

$$\int a^{bx}\, dx = \frac{a^{bx}}{b \log a} \qquad \text{for } a > 0$$

$$\int \log x \, dx = x \log x - x$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} \, dx = \begin{cases} \frac{1}{2a} \log \frac{a-x}{a+x} & \text{for } x^2 < a^2 \\ \frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x+a} & \text{for } x^2 > a^2 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{|a|} = -\arccos \frac{x}{|a|} \qquad \text{for } x^2 < a^2$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \, dx = \log(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} \, dx = \frac{1}{|a|} \sec^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2 \pm x^2}} \, dx = -\frac{1}{a} \log \left( \frac{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}{x} \right)$$

$$\int \sin(ax) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax)$$

$$\int \cos(ax) \, dx = \frac{1}{a} \sin(ax)$$

$$\int \tan(ax) \, dx = -\frac{1}{a} \log \cos(ax)$$

$$\int \csc(ax) \, dx = \frac{1}{a} \log \tan \frac{ax}{2}$$

$$\int \sec(ax) \, dx = \frac{1}{a} \log \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right)$$

$$\int \cot(ax)\,dx = \frac{1}{a}\log\sin(ax)$$

$$\int \sinh(ax)\,dx = \frac{1}{a}\cosh(ax)$$

$$\int \cosh(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sinh(ax)$$

$$\int \tanh(ax)\,dx = \frac{1}{a}\log\cosh(ax)$$

$$\int \operatorname{csch}(ax)\,dx = \frac{1}{a}\log\tanh\frac{ax}{2}$$

$$\int \operatorname{sech}(ax)\,dx = \frac{i}{a}\log\tanh\left(\frac{i\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)$$

$$\int \coth(ax)\,dx = \frac{1}{a}\log\sinh(ax)$$

$$\int x\sin ax\,dx = \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{x}{a}\cos ax$$

$$\int x^2\sin ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\sin ax - \frac{a^2x^2-2}{a^3}\cos ax$$

$$\int x\cos ax\,dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax$$

$$\int x^2\cos ax\,dx = \frac{2x\cos ax}{a^2} + \frac{a^2x^2-2}{a^3}\sin ax$$

# Dodatok C

# Súčty radov

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}, \quad \text{for } |r| < 1$$

$$\sum_{n=1}^{N} r^n = \frac{r - r^{N+1}}{1-r}$$

$$\sum_{n=a}^{b} n = \frac{(a+b)(b+1-a)}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$$

$$\sum_{n=a}^{b} n^2 = \frac{b(b+1)(2b+1) - a(a-1)(2a-1)}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log(2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} = \frac{3\zeta(3)}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} = \zeta(5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5} = \frac{15\zeta(5)}{16}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^6} = \frac{31\pi^6}{30240}$$

# Dodatok D

# Taylorove rady

$$(1-z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z| < 1$$

$$(1-z)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \qquad |z| < 1$$

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n \qquad |z| < 1$$

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad |z| < \infty$$

$$\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \qquad |z| < 1$$

$$\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{2n-1} \qquad |z| < 1$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \qquad |z| < \infty$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad |z| < \infty$$

$$\tan z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \frac{17z^7}{315} + \cdots \qquad |z| < \tfrac{\pi}{2}$$

$$\cos^{-1} z = \frac{\pi}{2} - \left( z + \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 z^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 z^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots \right) \qquad |z| < 1$$

$$\sin^{-1} z = z + \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 z^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 z^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots \qquad |z| < 1$$

$$\tan^{-1} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n-1}}{2n-1} \qquad |z| < 1$$

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad |z| < \infty$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad |z| < \infty$$

$$\tanh z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} - \frac{17z^7}{315} + \cdots \qquad |z| < \tfrac{\pi}{2}$$

$$J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2n} \qquad |z| < \infty$$

$$I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2n} \qquad |z| < \infty$$

# Literatúra

[1] G. Cain, *Complex Analysis* (online: http://people.math.gatech.edu/ cain/)

[2] T. L. Chow, *Mathematical Methods for Physicists: A concise introduction* (Cambridge University Press, 2000)

[3] H. Cohen, *Complex Analysis with Applications in Science and Engineering* (Springer, 2007)

[4] J. Eliáš, J. Horváth, J. Kajan, R. Šulka, *Zbierka úloh z vyššej matematiky 4* (Alfa, Bratislava, 1979)

[5] J. M. Howie, *Complex Analysis* (Springer, 2003)

[6] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics, 8th Ed., Part D* (John Wiley & Sons, 1999)

[7] J. H. Mathews, R. W. Howell, *COMPLEX ANALYSIS: for Mathematics and Engineering* (Jones and Bartlett Pub. Inc., 2006)

[8] S. Mauch, *Applied Math Lecture Notes* (online: http://www.its.caltech.edu/ sean/)

[9] H. A. Priestley, *Introduction to Complex Analysis* (OUP Oxford, 2003)

[10] E. B. Saff, A. D. Snider, *Fundamentals of Complex Analysis with Applications to Engineering, Science, and Mathematics* (Prentice Hall, 2003)

# Register


absolútna konvergencia, 131
analytická funkcia, 67
argument, 3

body vetvenia, 37, 68

Cauchy-Hadamardov vzorec, 134
Cauchy-Riemannove rovnice, 67
Cauchyho (odmocninové) kritérium, 133
Cauchyho integrálny vzorec, 113
Cauchyho nerovnosť, 113
Cauchyho teoréma, 99
  Jordanova krivka, 100

D'Alembertovo (podielové) kritérium, 132
DeMoivreova formula, 4
Dirichletovo kriérium, 133

Eulerov vzorec, 3

funkcia
  harmonická, 68
  harmonicky združená, 68
  komplexná, 35

geometrický rad, 132

harmonická funkcia, 68
harmonický rad, 132
harmonicky združená funkcia, 68

imaginárna jednotka, 1
inverzné trigonometrické funkcie, 36

Jordanova lema, 188

komplexná derivácia, 67
komplexná funkcia
  kartézsky tvar, 35
  polárny tvar, 35
komplexná rovina, 2
komplexné číslo
  algebraický tvar, 1
  argument, 3
  hlavná hodnota, 3
  kartézsky tvar, 2
  modul, 3
  polárny tvar, 3
  veľkosť, 3
  združené, 2
komplexne združené číslo, 2
konvergencia
  absolútna, 131
  Cauchyho (odmocninové) kritérium, 133
  D'Alembertovo (podielové) kritérium, 132

porovnávacie kritérium, 132
postupnosti, 131
rady, 131
rovnomerná, 133
krivkový integrál, 99
horné ohraničenie modulu integrálu, 99
nezávislosť na integračnej ceste, 100
vyhodnotenie pomocou parametrizácie, 99

Laurentov rad, 136
Laurentov rozvoj, 187
Liouvilleova teoréma, 113
logaritmická funkcia, 36

mocninový rad
absolútna konvergencia, 134
analytickosť, 134
definícia, 134
derivácia, 135
integrácia, 135
oblasť konvergencie, 134
rovnomerná konvergencia, 134
rovnomerne konvergentný, 134
modul, 3

Newton-Leibnizova formula, 100
Newtonov binomický vzorec, 135

pól, 68
polárny tvar, 3
porovnávacie kritérium, 132
postupnosti
konvergencia, 131

rady
Cauchyho (odmocninové) kritérium, 133
D'Alembertovo (podielové) kritérium, 132
geometrický, 132
konvergencia, 131
porovnávacie kritérium, 132
rezíduá, 187
$n$-násobný pól, 187
teoréma o rezíduách, 187
rovnomerná konvergencia, 133

singularita, 68
body vetvenia, 68
izolovaná, 68
neizolovaná, 68
odstrániteľná, 68
pól, 68
podstatná, 68
typy, 68

Taylorov rad, 135
tabuľka, 235
teoréma o rezíduách, 187
trigonometrické funkcie, 35

veľkosť, 3

Weierstrassovo kritérium, 133

základná teoréma algebry, 113